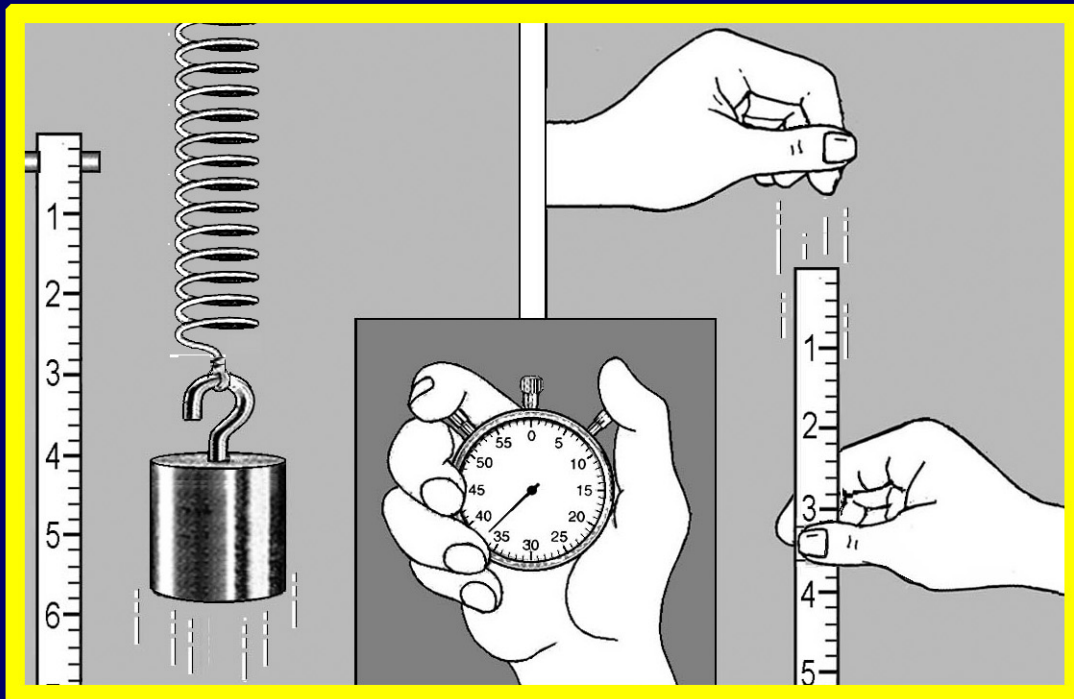


LABORATORIO I DE FÍSICA

(TERCERA EDICIÓN)

DOUGLAS FIGUEROA, LUIS E. GUERRERO,
ALFREDO SÁNCHEZ, NERY SUÁREZ
RAFAEL ESCALONA Y DIEGO SANJINES



LABORATORIO "D"



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

LABORATORIO I DE FÍSICA

(TERCERA EDICIÓN, 2008)

**DOUGLAS FIGUEROA, LUIS E. GUERRERO,
ALFREDO SÁNCHEZ, NERY SUÁREZ,
RAFAEL ESCALONA Y DIEGO SANJINES**



**LABORATORIO “D”
Universidad Simón Bolívar**



LABORATORIO 1 DE FÍSICA

Douglas Figueroa, Luis E. Guerrero, Alfredo Sánchez, Nery Suárez, Rafael Escalona y Diego Sanjinés,

© 2008 LABORATORIO D

3a. edición

Ira. Impresión

Universidad Simón Bolívar,

Valle de Sartenejas, Baruta, Estado Miranda. Apartado postal 89000, Caracas 1080-A,
Venezuela.

Teléfonos (58 212) 906-35 90, 906 35 21

FAX (58212) 906 35 19

ASOCIACIÓN AMIGOS DE LA USB

Diseño de colección Douglas Figueroa

Portada Douglas Figueroa

Coordinación de producción Eduardo D. Greaves

Composición y diagramación Douglas Figueroa y Eduardo D. Greaves

Impresión

LIMESAMA C.A.

Prologo de la primera edición

El aprendizaje de las ciencias naturales contempla dos enfoques complementarios e indisolubles si se desea que el estudiante logre una comprensión real y perdurable de los fenómenos naturales. Uno de ellos es la formulación cuantitativa que resulta de la aproximación que se hace de los fenómenos con modelos que intentan reproducirlos. El otro enfoque se basa en la observación que estimula la reflexión para conseguir la comprensión del fenómeno.

La generación de nuevos conocimientos puede resultar de la aplicación de un modelo, de la observación sistemática de los fenómenos naturales, o, como ocurre en la mayoría de los casos, de un esfuerzo cooperativo y complementario de ambos enfoques.

En los cursos de física básica se presenta al estudiante el primero de los enfoques. En los cursos de laboratorio se busca desarrollar las aptitudes y habilidades pertinentes para el segundo de los enfoques.

El objetivo del presente curso de laboratorio es precisamente iniciar al estudiante en la práctica del método científico y de la experimentación, compaginando el estudio de fenómenos físicos del mundo cotidiano con el apoyo de modernas técnicas de análisis. Bajo estas premisas se han seleccionado experiencias que abordan los más importantes tópicos de las físicas generales del primer año para que sean estudiados una vez más, pero en esta ocasión desde el punto de vista experimental.

En este esfuerzo se ha sido pionero en varias innovaciones metodológicas tanto de los contenidos como de las herramientas de análisis:

- Las experiencias abordan los fenómenos físicos de una manera realista: se estudia el tiempo de reacción en lugar de despreciar su influencia; se aborda la fricción estática en lugar de ignorarla; se construye un dinamómetro con un resorte común y corriente en lugar de recurrir a un dinamómetro comercial; se plantea la realidad del desequilibrio térmico en lugar de considerar el idealizado sistema aislado.

- En todas las prácticas se usa el computador como una herramienta de análisis de los datos obtenidos experimentalmente; en ningún caso se usa como elemento que trata de simular una realidad. Al hacer esto se logran dos metas: el alumno puede verificar la pertinencia de sus observaciones, prácticamente mientras está recolectando los datos; y, al mismo tiempo, puede profundizar en el análisis e interpretación del fenómeno estudiado, antes de abandonar el laboratorio.

Esta guía es el producto del trabajo de un grupo de profesores que se han planteado una actualización de los cursos de laboratorio combinando: la incorporación de las diversas experiencias que se han tenido en los últimos años; la renovación y modernización de los equipos, dentro de las posibilidades del Laboratorio "D"; y la introducción de nuevas prácticas de alto contenido didáctico, y a la vez motivantes, con el objetivo de afianzar la comprensión de la física.

Prof. Nery Suárez,
Jefe del Laboratorio "D" 1990

Prologo de la tercera edición

La presente edición incorpora una actualización del material contenido en las guías originales. Se hizo una revisión completa de los textos, corrección de errores y adecuación de los textos a los nuevos equipos utilizados en el laboratorio. Estos invariablemente mueren por desperfectos o por obsolescencia ante la aparición de nueva tecnología. Particularmente la base informática del laboratorio ha cambiado substancialmente y el apéndice 2 "Uso del computador en el laboratorio" es una versión extensamente modificada. Este trabajo es debido a la Ing. Eva Mora y el TSU. Tadeo Guerra.

Se han construido nuevos equipos para las prácticas de "Fricción" y la de "Péndulo de torsión". En esta labor han colaborado los técnicos Efraín Martínez, Kervin Pimentel y Joel Chirinos con el apoyo del taller por Luis Osorio y Jofre Marchena. Se ha construido nueva electrónica para los carriles de aire consistentes en sensores conectados a un programa en las PC que realiza y muestra las medidas de tiempo en las experiencias de "Movimiento acelerado" y "Conservación del momentum y choques" Estos nuevos sistemas son debidos al Ing. Jesús Vázquez, estudiante del Postgrado de Electrónica.

En esta edición hemos regresado a la costumbre inicial de hacer énfasis en la realización de experiencias de física en la firme creencia que los estudiantes aprenden **haciendo** en contraposición con la creencia que aprenden escuchando clases. Por ello se redujo a una sola experiencia de "Mediciones y errores" y

una sola experiencia de "Gráficos". Estas importantes habilidades no se aprenden con una sola experiencia sino que deben ser inculcadas mediante la insistencia en el cálculo de errores, el uso de cifras significativas y el correcto uso y elaboración de gráficos durante la realización de las demás experiencias del curso. Instamos a los profesores que dictarán este curso a enfatizar y exigir estos aspectos durante la corrección de todos los informes de sus alumnos.

El trabajo de revisión es debido a los profesores José Adames, Eduardo Greaves y Douglas Figueroa. Particularmente el Prof. Figueroa quien hizo un excelente trabajo con la elaboración de nuevas figuras y la escritura completa de nuevos textos.

Las guías del laboratorio son una parte integral del complejo "Sistema" que son los cursos de laboratorio de física en la USB. Son cursos ambiciosos y exigentes muy por encima de su valor en unidades crédito. Ellos llevan a los estudiantes de una manera rápida y eficiente a considerables niveles de experticia en la materia. Su actualización y renovación es una necesidad permanente por lo que agradecemos encarecidamente a las personas mencionadas por su contribución al perfeccionamiento del curso de Laboratorio de Física I

Prof. Eduardo D. Greaves.
Jefe del Laboratorio D,
Julio de 2008.

<i>PRÓLOGO</i>	Pág. 1
----------------------	--------

LISTA DE PRÁCTICAS:

Práctica I-01: Mediciones y Errores	Pág. I-1.1
Práctica I-02: El tiempo de reacción	Pág. I-2.1
Práctica I-03: Medición de la densidad de un sólido	Pág. I-3.1
Práctica I-04: Gráficos	Pág. I-4.1
Práctica I-05: El péndulo	Pág. I-5.1
Práctica I-06: Ley de Hooke y oscilador masa-resorte.....	Pág. I-6.1
Práctica I-07: Fricción entre sólidos	Pág. I-7.1
Práctica I-08: Movimiento acelerado en una dimensión.....	Pág. I-8.1
Práctica I-09: Conservación del Momentum y Choques	Pág. I-9.1
Practica I-10: Péndulo de torsión.....	Pág. I-10.1
<i>APÉNDICE A1: El informe de laboratorio.....</i>	<i>Pág. I-A1.1</i>
<i>APÉNDICE A2: Uso del computador en el laboratorio</i>	<i>Pág. I-A2.1</i>
<i>APÉNDICE A3: Masa equivalente de un resorte.....</i>	<i>Pág. I-A3.1</i>
<i>APÉNDICE A4: Ejercicios sobre errores y gráficos</i>	<i>Pág. I-A4.1</i>

MEDICIONES Y ERRORES

*Los errores son inevitables.
Lo que cuenta es cómo lidiar con ellos*

OBJETIVOS

- Estudiar los conceptos básicos que son inherentes a las mediciones en el laboratorio.
- Aprender las herramientas que se manejan en los métodos estadísticos para determinar los errores en las mediciones directas y los procedimientos utilizados para determinar la propagación de los errores en las mediciones indirectas.

TEORÍA

I. La medición de una cantidad física

Una magnitud física es un atributo de un cuerpo o un fenómeno que sea susceptible de ser medido. El medir una cantidad física es una operación que consiste en establecer la razón numérica entre la cantidad considerada y otra cantidad de la misma especie a la que se llama unidad o patrón de medida; ésta es elegida arbitrariamente por el operador. Las mediciones en el laboratorio pueden ser directas o indirectas. Ejemplos de mediciones directas son: las longitudes con una regla, la masa con una balanza, la temperatura con un termómetro o el tiempo transcurrido entre dos eventos usando un cronómetro.

Muchas cantidades físicas *no* se pueden medir directamente y se hace necesario encontrar su valor en forma indirecta a partir de la medida de otras cantidades que están relacionadas con ella. Por ejemplo, cuando determinamos la densidad de un

cuerpo, a partir de la medición de su masa y de su volumen o la velocidad de un cuerpo a partir de su desplazamiento y el tiempo, luego de operar matemáticamente con estas dos cantidades.

En el proceso de medir una cantidad física intervienen varios factores:

- El método de medición elegido
- Los instrumentos que se utilizan
- El operador que realiza la medición.

En los laboratorios de física, para llevar a cabo las mediciones disponemos de una variedad de instrumentos, desde los más sencillos, como reglas, tornillos micrométricos y balanzas, hasta otros más sofisticados como instrumentos electrónicos que utilizan tecnología digital de precisión.

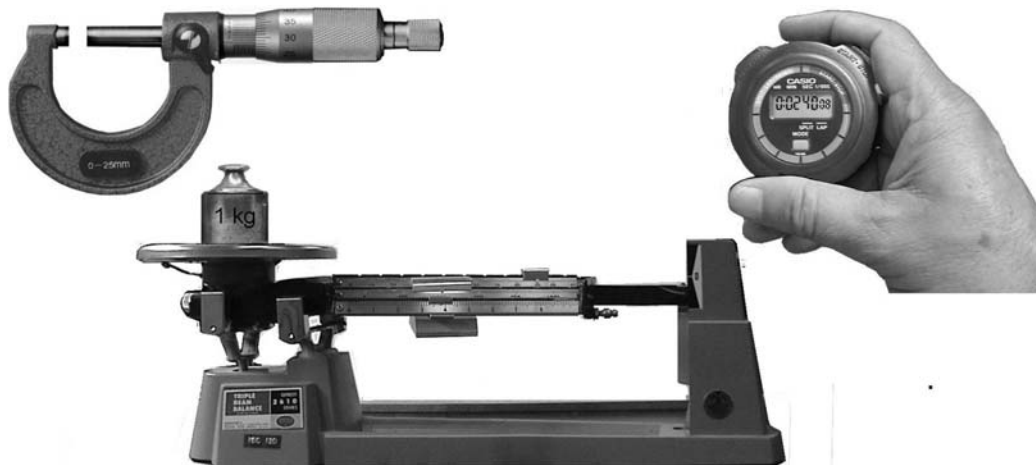


Fig. 1. Instrumentos de medición para: longitud, masa y tiempo

Por ejemplo, en una de las prácticas de este laboratorio vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de una pesa suspendida de un resorte, a tal fin Ud. va a utilizar una regla y un cronómetro para hacer las mediciones de longitud y tiempo en forma manual. El estudio también se podría llevar a cabo mediante ciertos instrumentos para la adquisición de datos en forma automática; estos utilizan un sensor de movimiento, que se basa en la emisión y detección de pulsos de ultrasonido hacia un obstáculo, para detectar la *posición de un objeto en tiempo real*, y enviar la data directamente a la computadora para su procesamiento y análisis.

Cuando queremos medir cierta cantidad física, uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta es la elección del instrumento apropiado. El instrumento será más *sensible* o *preciso* en la medida que sea capaz de apreciar o detectar variaciones cada vez más pequeñas de la cantidad medida. Será más o menos *exacto* si los valores que indica están en mayor o menor correspondencia con el valor verdadero según el patrón

correspondiente. Un instrumento puede ser *muy sensible o preciso* y a la vez *poco exacto*, al no estar calibrado correctamente con relación a un patrón conocido.

II. **Apreciación de un instrumento y estimación de una lectura**

La *apreciación de un instrumento* es la menor medida que el operador puede hacer con el mismo, es decir, el mínimo valor de una división de la escala. Así, una regla graduada cuya menor división es 1 mm, tiene una apreciación de 1 mm. Sin embargo, al hacer uso de esta regla el operador podrá medir y reportar una longitud dando el resultado no en milímetros sino con algunas décimas de milímetros.

Esto nos lleva a definir la *estimación de una lectura* como el menor intervalo que el operador puede reportar con la escala del instrumento que dispone. La estimación es menor que la apreciación del instrumento y depende de la habilidad del operador. Se traduce en añadir una cifra decimal a la lectura.

Ejemplo 1: *Para medir la longitud de un tornillo dos operadores distintos utilizan el mismo instrumento: una regla cuya apreciación es 1 mm, y aplican el mismo procedimiento: hacen coincidir el cero de la escala de la regla con la cara inferior de la cabeza del tornillo para ver donde cae el otro extremo del tornillo sobre la escala (Fig.2).*

El observador *pesimista* encuentra que el extremo del tornillo queda ubicado muy cercano a la marca de 29 mm y reporta que la longitud del tornillo es 29 mm con una incertidumbre de 0,5 mm.

El observador *optimista* es más meticulado y se da cuenta que el extremo del tornillo queda entre dos divisiones de la escala: 29 mm y 30 mm. El trata de expresar esta situación escogiendo una cifra adicional que no es *leída* sino mas bien *estimada* y como él considera que tiene muy buen ojo, estima como mejor lectura 29,3 mm con una incertidumbre de 0,3 mm.

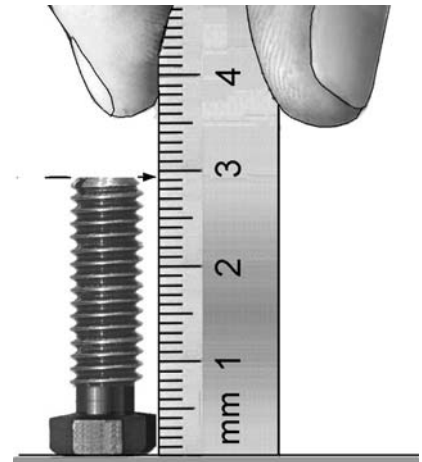


Fig. 2. Estimación de una lectura

Algunos experimentadores prefieren siempre tomar la mitad de la apreciación del instrumento como el valor de la incertidumbre en la lectura. Sin embargo, creemos que esta es una postura demasiado pesimista.

En el caso de instrumentos con escala digital, la incertidumbre de la lectura se puede conseguir en el manual técnico de los mismos. Cuando no se dispone de esta información, como la cifra indicada en la pantalla ha sido redondeada, podemos tomar como incertidumbre, la unidad en la posición de la última cifra.

Por ejemplo, si en la pantalla de un voltímetro digital se despliega 5.86 voltios (Fig. 3); en este caso entendemos que la incertidumbre del voltaje es 0,01 voltio.



Fig. 3: Una escala digital

III. Los errores de medición

Al efectuar la medida, sabemos que existe un valor verdadero de la magnitud física que estamos estudiando pero, a pesar de todos los cuidados que se tomen al seleccionar el instrumento utilizado para realizar las medidas y el esmero con que se realicen, nunca se logrará alcanzar ese valor verdadero y por ello buscaremos la mejor aproximación que podamos alcanzar.

El valor medido de una cantidad física depende tanto de la precisión del instrumento como del método de medición, y también de la experiencia y atención del operador. Es decir, inevitablemente toda medición está afectada por las imperfecciones de los instrumentos, por las condiciones de la medida y también por las limitaciones de nuestros sentidos.

En ciencias e ingeniería, llamamos *error* a la incertidumbre que se tiene en la cantidad medida. Es un indicador del grado de credibilidad del resultado de una medición. Cuando reportamos el valor de la cantidad junto con su correspondiente *error*, quedan bien especificados los límites dentro de los cuales se encuentra el valor verdadero, dado que la medición sólo nos brinda un valor aproximado. Los errores son parte inherente del propio proceso de medición y, generalmente, se suelen clasificar en sistemáticos y casuales.

a) Errores sistemáticos

Son aquellos errores que se repiten constantemente en el transcurso del experimento y afectan a todas las medidas de la misma manera; tienen un mismo signo algebraico, esto es, tienden a dar valores siempre mayores o siempre menores que el valor verdadero. No se pueden minimizar por la vía del cálculo de promedios repitiendo las mediciones varias veces.

Un error sistemático muy común es el llamado *error de paralaje*, por la tendencia del operador a ubicarse mal frente al instrumento, dirigiendo la visual en forma oblicua sobre la escala (Fig. 4).

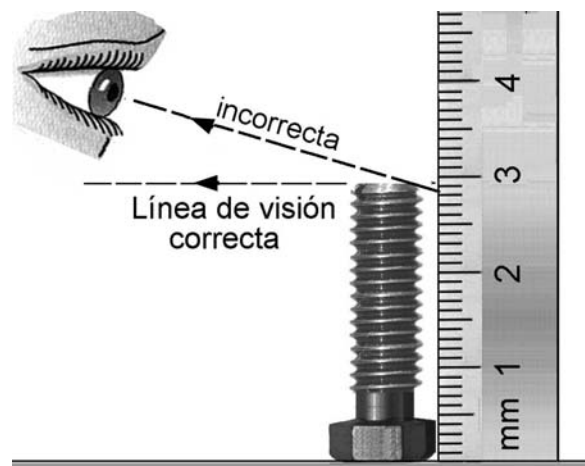


Fig. 4: Un error de paralaje

Los errores de paralaje se cometen con mucha frecuencia en aquellos instrumentos en que una aguja se mueve sobre una escala. La falta de perpendicularidad de la línea de visión con la escala cuando el observador tiene el hábito de mirarla de lado, resulta en un error sistemático (Fig. 5).

En estos casos, se suele colocar un pequeño espejo en el plano de la escala, para que con la ayuda de la imagen de la aguja en el espejo, el operador pueda dirigir la visual en forma perpendicular a la escala.



Fig. 5: Escala con aguja móvil

Otro error sistemático puede ser introducido por una mala calibración del instrumento de medición o también por el *corrimiento del cero* del mismo, el cual *no* fue previamente ajustado correctamente antes de efectuar la lectura. Su valor ficticio se añadirá o restará posteriormente al de la lectura indicada.

Los errores sistemáticos pueden producirse por equipos defectuosos o por factores ambientales, como cuando el operador no se ha dado cuenta que durante el transcurso del experimento ha ocurrido algún cambio de temperatura, presión o humedad que afecta sus mediciones. Muchas veces los errores sistemáticos suelen ser difíciles de detectar para poder ser corregidos y la única manera de darnos cuenta es por comparación con otros métodos alternativos.

b) Errores casuales o aleatorios

Son errores originados por factores accidentales o fortuitos; hacen que las medidas obtenidas sean a veces mayores que el valor verdadero y otras veces menores. Se deben a descuidos casuales del observador y a pequeñas variaciones de las condiciones experimentales que escapan al control del observador. Se caracterizan por el azar de ambos signos algebraicos, son variables en magnitud y oscilan alrededor de un valor medio. Veremos que estos errores pueden ser minimizados aplicando criterios estadísticos por la vía del cálculo de promedios, después de repetir la medición un número suficiente de veces bajo las mismas condiciones.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN CONJUNTO DE MEDICIONES

Cuando se mide una cantidad y se repite la operación varias veces de la misma manera, el resultado podría parecer desconcertante porque lo más probable es que las lecturas sean todas diferentes, aunque pudiera haber valores repetidos. Esta diversidad de lecturas son intrínsecas a la naturaleza estadística de la operación de

medir, por la influencia que tienen diversos factores aleatorios que son incontrolables. Entonces surge la pregunta: ¿Cuál es el valor que se debe asignar a la cantidad medida? y ¿cuál sería su incerteza? El propósito del tratamiento estadístico de los datos experimentales es justamente determinar el valor más probable de una cantidad medida y estimar su confiabilidad.

IV. El valor medio como el mejor valor de una cantidad medida

Supongamos que una cantidad cuyo valor verdadero es x_v es medida N veces, (utilizando el mismo instrumento y el mismo procedimiento) y encontramos N resultados: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Es posible demostrar (ver referencia 2) que en el límite $N \rightarrow \infty$, el valor que más se acerca al verdadero valor x_v , viene dado por el promedio aritmético de los N valores:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

El valor medio $\langle x \rangle$, puede por lo tanto ser considerado como el mejor valor asequible de la cantidad medida y es el que reportaremos como el *valor observado*. Veamos ahora como podemos determinar cuan confiable es este valor $\langle x \rangle$.

V. La desviación estándar σ , de cada medición

Supongamos que para un cierto conjunto de medidas x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), calculamos la desviación de cada resultado, x_i , respecto a la media $\langle x \rangle$:

$$d_i = x_i - \langle x \rangle \quad (2)$$

Si ahora calculamos el promedio de todas las desviaciones, se tiene:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right) - \langle x \rangle = 0 \quad (3)$$

Es decir, el promedio $\langle d \rangle$ de las desviaciones siempre resulta igual a *cero* y por lo tanto, hemos encontrado que es una cantidad inútil a los efectos de cuantificar la confiabilidad de las medidas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$.

Veamos ahora que una cantidad más apropiada para cuantificar la dispersión es la *desviación estándar*, σ , la cual se define como la raíz cuadrada de la media de las desviaciones cuadráticas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (4)$$

Note que la desviación estándar σ , tiene las mismas unidades físicas que x y siempre será un número positivo. La desviación estándar es una medida apropiada de la incertidumbre debida a fluctuaciones en las observaciones y caracteriza por lo tanto, el error aleatorio que se puede atribuir a cada una de los valores x_i :

$$x_i \pm \sigma \quad (5)$$

Este error σ es común a todas las mediciones pues se calcula haciendo consideraciones estadísticas que toman en cuenta todo el conjunto de observaciones. Es una medida de la dispersión de los datos en torno a su promedio $\langle x \rangle$ y en consecuencia, de la calidad del conjunto de medidas.

Consideremos el conjunto de medidas x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) que están distribuidas a lo largo de un rango finito de valores. Podemos dividir este rango en un cierto número de intervalos y contar cuántos valores de x_i hay en cada uno de esos intervalos. Podemos ahora graficar el número de valores que queda en cada intervalo (la frecuencia) en función de la variable x , obteniendo así un *histograma de barras*. La figura 6 muestra el histograma de dos conjuntos de medidas x_i . Se observa que tienen igual valor medio pero presentan distintos grados de dispersión de sus valores.

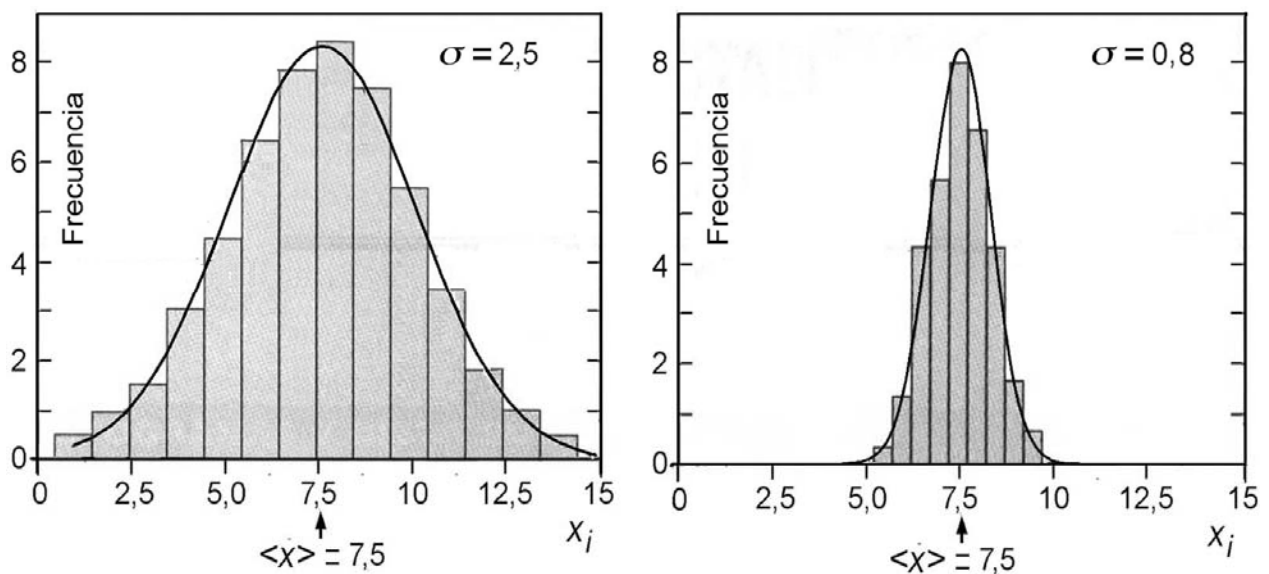


Fig. 6: Histograma de barras.

En cada uno de estos histogramas se ha trazado una curva teórica envolvente que corresponde a una función de probabilidad, $f(x)$, esta es la *distribución de Gauss* o *Normal*, que es la que aparece con más frecuencia en fenómenos naturales y en

distintas áreas de la física. En la distribución gaussiana los valores de x se disponen simétricamente alrededor del valor medio en forma de una *campana* y su ancho está determinado por la desviación estándar σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6)$$

Si la campana es ancha, la desviación estándar σ es grande, mientras que si es estrecha, el valor de σ es pequeño. Los puntos de inflexión de la curva están ubicados en $(\langle x \rangle - \sigma)$ y $(\langle x \rangle + \sigma)$.

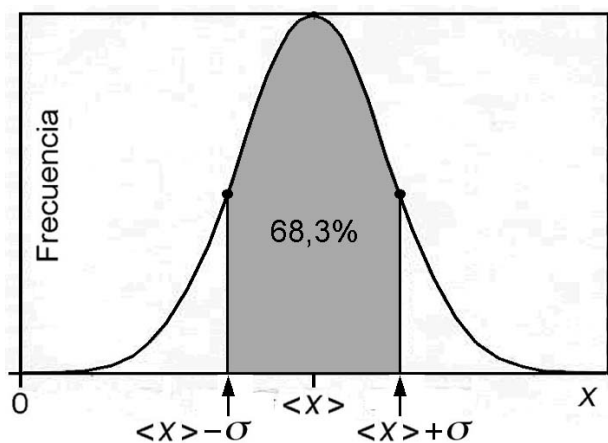


Fig. 7. Campana de Gauss

El área de la curva comprendida entre estos dos puntos constituye el 68,3 % del área total (Fig.7). Esto significa que, considerando sólo los errores aleatorios, podremos estar confiados con un 68,3 % de probabilidad que cualquier medida de x arrojará un valor dentro del intervalo establecido por σ .

Ejemplo 2: Se efectúan 10 mediciones del período T (s), de las oscilaciones de un oscilador masa-resorte, dando los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Mediciones	Valor x_i medido	Desviación ($x_i - \langle x \rangle$)	Desviación cuadrática ($x_i - \langle x \rangle$) ²
1	8,50	-0,070	0,0049
2	8,60	+0,03	0,0009
3	8,90	+0,33	0,1089
4	8,20	-0,37	0,1369
5	8,50	-0,07	0,0049
6	8,70	+0,13	0,0169
7	8,50	-0,07	0,0049
8	8,40	-0,17	0,0289
9	8,50	-0,07	0,0049
10	8,90	+0,33	0,1089
	$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum x_i = 8,57s$	$\sum (x_i - \langle x \rangle) = 0$	$\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 = 0,421s^2$

Con la suma de las desviaciones al cuadrado, calculamos la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \langle x \rangle)^2} = \sqrt{\frac{0,421 \text{ s}^2}{10}} = 0,21 \text{ s}$$

Por lo tanto, podemos decir que el *mejor valor* o valor más probable del periodo es $\langle T \rangle = 8,57 \text{ s}$ y la dispersión de las lecturas es $\pm 0,21 \text{ s}$. Esto significa que si, en este mismo oscilador masa-resorte, efectuamos una nueva medición del periodo, la probabilidad de que arroje un valor en el intervalo (8,36 s - 8,78 s) es de 68,3%.

VII. La desviación estándar del valor medio

La desviación estándar σ de un conjunto de N medidas individuales da una idea acerca de la dispersión alrededor del valor promedio $\langle x \rangle$, pero no podemos decir que el intervalo $(-\sigma, +\sigma)$ sea el intervalo de certeza asociado a la medición.

Supongamos que sobre un mismo sistema realizamos en forma separada, varios conjuntos de N mediciones de x , y para cada una de estos conjuntos calculamos el correspondiente promedio. Es de esperar que los valores de los promedios de los distintos conjuntos de medidas sean diferentes, pero la dispersión será la misma, puesto que σ no depende de N sino de la calidad de las mediciones. Esto significa que los distintos promedios se encontrarán distribuidos con una *dispersión menor* que la que tenían las mediciones individuales. Se puede demostrar (Ver referencia 2) que la distribución de los promedios $\langle x \rangle$ será gaussiana y tienen una desviación estándar que disminuye en proporción a \sqrt{N} respecto de la desviación estándar de las medidas:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{Desviación estándar del promedio}) \quad (7)$$

Con esta expresión tenemos un criterio para determinar los límites dentro de los cuales podemos reportar que se encuentra el valor de una cantidad x en el proceso de repetir la medida N veces:

$$x = \langle x \rangle \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

Ejemplo 3: *Determine el valor que debemos reportar para el período de las oscilaciones del oscilador masa-resorte del ejemplo 1.*

Utilizando el resultado obtenido para la desviación estándar de las 10 medidas individuales $\sigma = 0,20 \text{ s}$, podemos calcular la desviación estándar del promedio:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,20}{\sqrt{10}} = 0,06 \text{ s}$$

Por lo tanto, basándonos en las 10 mediciones, podemos reportar que el periodo de las oscilaciones del oscilador masa resorte es:

$$T = (8,56 \pm 0,06) \text{ s}$$

Observe que la expresión para calcular los errores: $\sigma_{\langle x \rangle} = \sigma / \sqrt{N}$, es un resultado sumamente importante: *Si queremos reducir el error aleatorio a valores despreciables, bastaría con llevar a cabo un número suficiente de medidas.*

Pero ¿valdría la pena el esfuerzo en realizar un número muy grande de medidas para tratar de disminuir $\sigma_{\langle x \rangle}$? ¿cuál sería el valor de N óptimo o suficiente? Resulta evidente que el límite de N estaría impuesto por los errores sistemáticos y los errores de apreciación, que permanecerán inalterables a pesar de los criterios estadísticos, *de modo que nunca podremos llegar mas allá de estos límites.*

Una regla práctica consistiría en tomar unas pocas medidas, hechas de la misma manera y observar la dispersión de las lecturas. Si la desviación resulta pequeña comparada con el error de cada lectura, no habría necesidad de más mediciones y simplemente se toma el *error de lectura* como el *error* del promedio.

VI. Diferencia entre precisión y exactitud

Para un conjunto de medidas x_j ($i = 1, 2, \dots, N$) la confianza o calidad del resultado lo da tanto su *exactitud* como su *precisión*. Una medida será más exacta cuanto más cerca está el valor medio observado del valor verdadero. La *exactitud* está relacionada con los errores sistemáticos. Por otro lado, la *precisión* está ligada a la reproducibilidad de la medida, es decir, a la distribución de los resultados en torno al valor medio y está asociada con los *errores casuales o aleatorios*.

En la figura 8a comparamos dos conjuntos de medidas, A y B, con el mismo valor medio y por lo tanto, tienen la misma exactitud. La distribución A es más aguda alrededor del valor medio y tiene una menor desviación estándar, por lo que se considerará a este conjunto como el *más preciso*. En la figura 8b comparamos dos conjuntos de medidas, C y D, distribuidos idénticamente en torno a sus respectivas medias, por ello tienen *igual precisión*, aunque los valores medios sean distintos. Como el valor medio del conjunto C está más cerca al valor verdadero x_v , resulta *más exacto*.

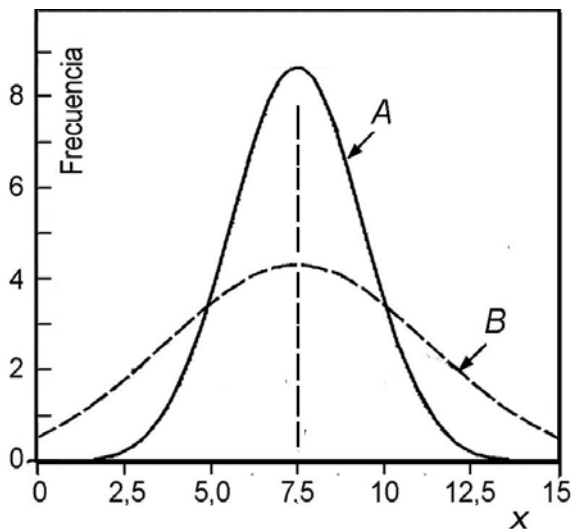


Fig. 8a: Igual exactitud. Diferente precisión

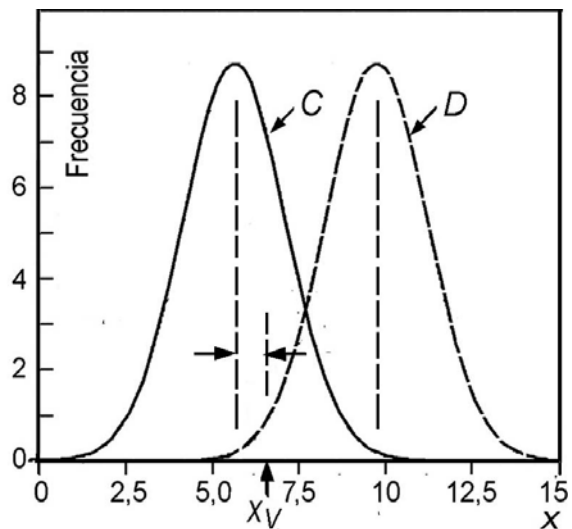


Fig. 8b: Diferente exactitud. Igual precisión

Ejemplo 4: En la figura 9 se muestran cuatro resultados obtenidos en una práctica de lanzamiento de dardos al blanco. Haciendo una analogía con los procesos de medición queremos ilustrar la distinción entre los conceptos de exactitud y precisión.

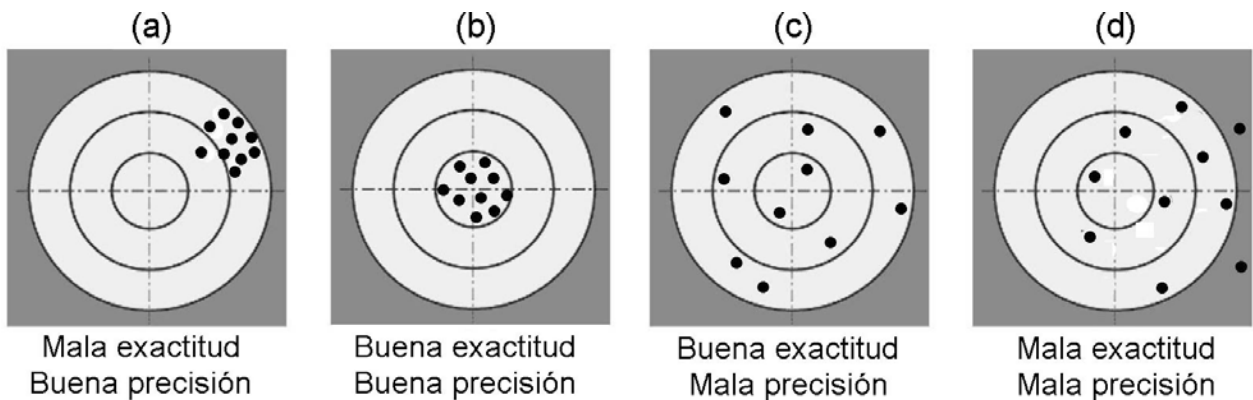


Fig. 9: Ilustración de la diferencia entre exactitud y precisión

La serie de lanzamientos es análoga al conjunto de medidas realizadas y el centro de los anillos se considera como el “valor verdadero”. Aquí los errores casuales estarían asociados a cualquier factor que haga que los dardos lleguen en forma aleatoria a distintos puntos. Mientras que los errores sistemáticos estarían ocasionados porque existe algún sesgo que hace que los dardos impacten en una zona fuera del centro en forma sistemática. Podría ser, por ejemplo, que hay un viento fijo que los estuviese desviando. En los cuatro resultados mostrados, la zona de dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que la ubicación del centroide del conjunto de puntos respecto al centro, da una idea de la exactitud.

VIII. Error relativo y error porcentual

La magnitud de un error tiene una significación o importancia relativa. El error absoluto Δx se considerará pequeño o grande solamente en comparación con el correspondiente valor de la cantidad observada. De allí, la importancia de definir el *error relativo*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \quad (9)$$

El *error porcentual* es el error relativo expresado en forma de porcentajes:

$$\varepsilon\% = \varepsilon \times 100 = \frac{\Delta x}{x} \times 100 \quad (10)$$

Los errores relativos y porcentuales son más significativos que los errores absolutos y se suelen reportar con una sola cifra significativa. Ellos nos dan una idea más realista de las bondades de las medidas que estamos realizando.

IX. Propagación de errores: Medidas indirectas

Cuando nos encontramos con cantidades físicas que no se pueden medir directamente pero que están relacionadas analíticamente con otras que se miden acompañadas de sus respectivos errores, éstos se propagan a la cantidad que queremos calcular de acuerdo a la relación funcional que las vincula. Presentaremos a continuación los dos métodos de mayor uso *para propagar el error* de las cantidades medidas a la cantidad calculada.

a) Método de las derivadas parciales

En base al hecho de que los errores de medida generalmente son pequeños en relación con las cantidades observadas, se puede desarrollar el método de propagación de errores en base al cálculo diferencial.

Sea x la cantidad que queremos calcular a partir de otras cantidades: A_1, A_2, \dots, A_N que son el resultado de procesos de medición. Cada una de las cantidades A_j está asociada a su respectivo error ΔA_j , y además se conoce la relación entre los A_j y x :

$$x = x(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N) \quad (11)$$

La notación indica que x es una función de las variables A_j . El *diferencial total* de la función x se define de la siguiente manera:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial x}{\partial A_2} dA_2 + \frac{\partial x}{\partial A_3} dA_3 + \dots + \frac{\partial x}{\partial A_N} dA_N \quad (12)$$

Acá $\partial x/\partial A_1$ denota la derivada parcial de la función x con respecto a la variable A_1 considerando constantes el resto de las variables A_2, A_3, \dots, A_N .

Los diversos diferenciales, dA_i , que aparecen en la expresión para el diferencial total de x pueden ser considerados como los distintos errores, ΔA_i , obteniéndose la siguiente expresión:

$$\Delta x = \left| \frac{\partial x}{\partial A_1} \right| \Delta A_1 + \left| \frac{\partial x}{\partial A_2} \right| \Delta A_2 + \left| \frac{\partial x}{\partial A_3} \right| \Delta A_3 + \dots + \left| \frac{\partial x}{\partial A_N} \right| \Delta A_N \quad (13)$$

Esta es una expresión general para el cálculo del error Δx de la cantidad calculada x a partir de los errores $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, \dots, \Delta A_N$ de las cantidades que se miden.

Los errores $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_N$ son positivos por convención. Sin embargo, las diversas derivadas parciales involucradas pueden adoptar ambos signos. Esto hace necesario que se tome el valor absoluto de las derivadas parciales; se evita así la compensación (o cancelación) entre los términos involucrados en el miembro derecho de la expresión. Hacer esto equivale a adoptar la posición más pesimista y optamos por calcular el *error máximo*.

Ejemplo 5: Consideremos la energía cinética de una partícula de masa m que tiene una velocidad v . Calculemos el diferencial total de la función $K = K(m, v)$:

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

$$dK = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{1}{2} v^2 dm + \frac{1}{2} m d(v^2) = \frac{1}{2} v^2 dm + mv dv$$

Aplicando el esquema explicado previamente se obtiene el error absoluto ΔK :

$$\Delta K = \left| \frac{1}{2} v^2 \right| \Delta m + |mv| \Delta v$$

Asimismo, el error relativo es:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\left| \frac{1}{2} v^2 \right| \Delta m + |mv| \Delta v}{\frac{1}{2} mv^2} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \left| \frac{\Delta v}{v} \right|$$

b) Método de las derivadas logarítmicas

Al tratar con funciones que tengan productos y cocientes, el uso de las derivadas logarítmicas brinda el método más práctico para calcular los errores relativos de cantidades determinadas indirectamente.

El método consiste en diferenciar el logaritmo neperiano de la función $x = x(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N)$:

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

En caso de que proceda, se debe agrupar términos que posean diferenciales dA_i en común, *antes* de escribir los diferenciales dA_i como errores ΔA_i . Siempre queremos determinar el error máximo: por ello es necesario tomar nuevamente el valor absoluto del coeficiente de los distintos errores, ΔA_i .

Ejemplo 6: Consideremos de nuevo el caso de la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. La diferenciación del logaritmo neperiano de K da el siguiente resultado:

$$d(\ln K) = d\left[\ln\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right] = d\left(\ln\frac{1}{2} + \ln m + 2\ln v\right) = \frac{dm}{m} + 2\frac{dv}{v} \equiv \frac{dK}{K} \quad (14)$$

Al reinterpretar como errores los diferenciales en la expresión obtenida, manteniendo las convenciones relativas a la toma de valor absoluto de los coeficientes, se obtiene la expresión del error relativo:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} + 2\left|\frac{\Delta v}{v}\right|$$

Esta expresión coincide con la obtenida por el método de las derivadas parciales y de ella podemos deducir el error absoluto.

X. Manejo de resultados experimentales

a) Cifras significativas y redondeo

Una *cifra significativa* es todo dígito que tenga significado físico. El número de cifras significativas de una cantidad se determina contando desde la izquierda a partir de la primera que es diferente de cero hasta la primera cifra afectada de error inclusive.

Ejemplos de cifras significativas

Número	501	0,501	0,0501	501,0	501,00	5,01x10 ⁶
Cifras significativas	3	3	3	4	5	3

En este laboratorio, como regla general, se expresará el *error absoluto con una sola cifra significativa* lo que conduce a que el resultado solo tenga una cifra incierta.

Cuando queremos expresar el resultado de una medida nos vemos en la necesidad de eliminar dígitos que carecen de sentido físico. La última cifra significativa a retener será aquella que está afectada por el error de dicha medición.

Ejemplo 7: Supongamos que realizamos una serie de medidas del tiempo de caída de un cuerpo desde cierta altura y calculamos el tiempo promedio y la respectiva desviación estándar de los tiempos promedios, con los siguientes resultados:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i = 15,027 \text{ s} \qquad \sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0,042 \text{ s}$$

Supongamos que el error de lectura del cronómetro puede despreciarse al compararlo con $\sigma_{\langle x \rangle}$, entonces se toma como error de la medida: $\Delta t = \sigma_{\langle x \rangle}$. Para expresar este resultado, de acuerdo a lo convenido para nuestro trabajo, debemos escribir primero el error con una sola cifra significativa: $\Delta t = \pm 0,04 \text{ s}$. Vemos que el promedio $\langle t \rangle$ calculado tiene 3 cifras exactas pero la cuarta ya es dudosa porque está afectada por el error, por ello suprimimos la quinta cifra que no tiene sentido físico y el promedio lo *redondeamos* a: $\langle t \rangle = 15,03$. Podemos reportar para el tiempo un valor,

$$t = (15,03 \pm 0,04) \text{ s}$$

Ejemplo 8: Cuando se usa una calculadora para procesar datos experimentales, una práctica común es retener en la respuesta final del cálculo, todas las cifras que aparecen en la pantalla. Sin embargo, reportar este resultado no tiene sentido físico.

Suponga que se desea calcular el volumen de una esfera cuyo radio se conoce con tres cifras significativas: $r = 2,18 \pm 0,03 \text{ cm}$. Empleando una calculadora, se obtiene: $V = (4/3)\pi r^3 = 43,39683832 \text{ cm}^3$.

Lo correcto es retener solamente aquellos dígitos que



se conocen con razonable certeza, los cuales están determinados por el error en el volumen, ΔV .

Aplicando la propagación de errores se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta r}{r} = 3 \left(\frac{0,03}{2,18} \right) = 0,04128, \quad \Delta V = 1,704 \text{ cm}^3$$

Después de redondear ΔV , a una cifra significativa, reportamos que el valor del volumen es $V = (43 \pm 2) \text{ cm}^3$.

Criterios de redondeo. Para evitar ambigüedades en el redondeo de un número (por defecto o por exceso), convendremos los siguientes criterios que son los mismos utilizados en las computadoras:

- 1) Si el primer dígito a suprimir es menor que 5, la última cifra retenida se deja igual.
- 2) Si la cifra a suprimir es 5 o mayor que 5, entonces se aumenta en una unidad la última cifra retenida.

Número	5 cifras	4 cifras	3 cifras	2 cifras	1 cifra
3,14159	3,1416	3,142	3,14	3,1	3
851613	85161×10^1	8516×10^2	852×10^3	85×10^4	9×10^5
$9,52068 \times 10^{-3}$	$9,5207 \times 10^{-3}$	$9,521 \times 10^{-3}$	$9,52 \times 10^{-3}$	$9,5 \times 10^{-3}$	1×10^{-2}
299792458	$2,9979 \times 10^8$	$2,998 \times 10^8$	$3,00 \times 10^8$	$3,0 \times 10^8$	3×10^8

b) Realización de cálculos

Al realizar cálculos podemos señalar algunas reglas a observar:

- En multiplicaciones o divisiones: el resultado final no debe tener más cifras significativas que el número con menos cifras significativas.

Operación	Resultado	Redondeo
$2,3 \times 3,14159$	7,225657	7,2
$2,30 \times 3,14159$	7,225657	7,23
$23 \times 3,14159$	72,25657	72
$0,23 \times 3,14159$	0,7225657	0,72

36,5 / 3,414	10,69127124	10,7
3,014467 / 0,62	4,862043548	4,9

- En sumas o restas, el resultado no debe tener más cifras significativas después del punto decimal que el sumando con menos cifras significativas después del punto decimal.

Operación	Resultado	Redondeo
322,10 + 3,9 + 0,307	326,307	326,3
21,0 + 0,725 + 3,61	25,335	25,3
55 + 4,28 + 203,6 +121,470	384,350	384
8,2 + (3,6 × 10 ⁻²) - 1,07	7,166	7,2

- Las constantes (como π) se emplean en los cálculos con tantas cifras significativas *como sean necesarias*.
- Al transformar las unidades se preserva el criterio de que el error se reporta con una cifra significativa. Por ejemplo: $\Delta x = 0,2 \text{ s} = 0,003 \text{ min}$.
- Las unidades angulares deben transformarse a radianes antes de emplearlas en las propagaciones de errores. Por ejemplo: $\Delta \theta = 0,01^\circ = 2 \times 10^{-4} \text{ rad}$.

RESUMEN

El tratamiento estadístico de una data experimental nos permitirá reducir considerablemente los errores casuales de las mediciones. Este análisis sería rigurosamente válido cuando se tiene un conjunto suficientemente grande de mediciones, repetidas bajo las mismas condiciones. En los experimentos que vamos a realizar, por razones prácticas, bajaremos esta condición a un número pequeño de medidas ($N < 10$), procurando que éstas sean de buena calidad. Para encontrar el valor de una cantidad x , y prescindiendo de los errores sistemáticos que suponemos han sido corregidos o eliminados, se procede de la siguiente manera:

- 1) Determine el error de apreciación en el instrumento utilizado.
- 2) Haga una serie de N mediciones de la misma manera y construya una tabla.
- 3) Calcule la media aritmética: $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^N x_i / N$
- 4) Calcule la desviación estándar de la media: $\sigma_{\langle x \rangle} = \sigma / \sqrt{N}$

5) Compare la desviación estándar con el error de apreciación y tome como error de la media, Δx , el mayor de estos dos valores. El error debe tener una sola cifra significativa.

6) Escriba el resultado final de la media sólo con las cifras significativas limitadas por el error: $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ (indicando las unidades apropiadas).

7) Si la cantidad x a determinar no se puede medir directamente, sino que se relaciona con las cantidades medidas mediante una relación funcional $x(A, B, C..)$, aplique las técnicas de propagación de errores de las magnitudes que intervienen.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

a) Demuestre la igualdad entre las dos maneras usuales de expresar la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

b) Consulte el manual de su calculadora y estudie el procedimiento para computar la desviación estándar. Esto le será de utilidad en todos los cursos de laboratorio y en su vida profesional.

c) En las siguientes expresiones aplique los dos métodos para evaluar el error Δx sobre la cantidad $x(A, B)$. Tome en cuenta que $A, \Delta A, B, \Delta B$ son conocidos.

1) $x = A + 3B$

2) $x = AB^2$

3) $x = 5B^3$

d) Escriba el resultado final de los siguientes cálculos, de acuerdo a las reglas enunciadas en el texto:

1) $950,12 + 35,4 + 747,991$

2) $1230000 \times 0,000123 / 43,21$

ACTIVIDADES A REALIZAR DURANTE LA SESIÓN DE PRÁCTICA

El profesor expondrá los fundamentos teóricos de esta práctica y resolverá algunos ejemplos numéricos de aplicación sobre propagación y cálculo de errores en situaciones específicas. A continuación sugerimos una selección de ejercicios y actividades, algunas de las cuales serán realizados durante la sesión de práctica.

- A1.** Dadas las expresiones siguientes, $x = x(A, B, C)$, siendo A , B y C variables independientes, calcule el error relativo $\Delta x/x$. Usted podrá escoger entre el método de las derivadas parciales y el de las derivadas logarítmicas. (se suponen conocidos los errores relativos $\Delta A/A$, $\Delta B/B$, $\Delta C/C$).

a) $x = \frac{A - B}{(A^2 + B^2)^2}$

b) $x = \left(\frac{A - B}{A + B}\right)^3$

c) $x = A^4 + \frac{B}{\sqrt{C}}$

d) $x = \ln\left(\frac{B}{A}\right)^A$

e) $x = \frac{A^3}{4B} + BC$

f) $x = \frac{\text{tg}A}{\text{sen}B}$

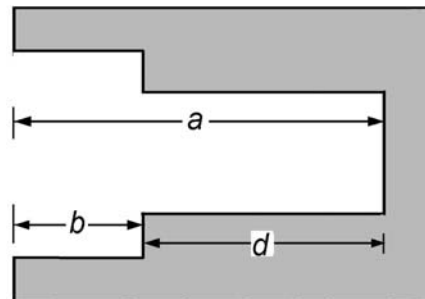
- A2.** La resistencia de un aislador en función de la temperatura absoluta T , está dada por:

$$R = R_0 e^{E/kT}$$

siendo E la energía de activación y R_0 una constante de proporcionalidad; k es la constante de Boltzmann ($k = 8,617 \times 10^{-5}$ eV/°K). Se desea medir R con 10% de error y se conoce que $E = (0,60 \pm 0,01)$ eV, $T = (800 \pm 1)$ K. Determine el error porcentual correspondiente a R_0 .

- A3.** Una pieza metálica tiene la forma de la figura. Se observa que sólo es posible medir la distancia d indirectamente, como la diferencia entre las longitudes a y b .

Si $a = (18,5 \pm 0,1)$ mm y $b = (6,2 \pm 0,1)$ mm, ¿Qué valor reportaría Ud. para la distancia d ?



A4. Verificación experimental del número π . A Ud. se le suministra una lata de leche vacía de forma cilíndrica y una regla graduada cuya apreciación es 1 mm. Diseñe un procedimiento para determinar el número π con la mejor precisión posible. Considerando la propagación de errores, estime el error relativo en esta medición.

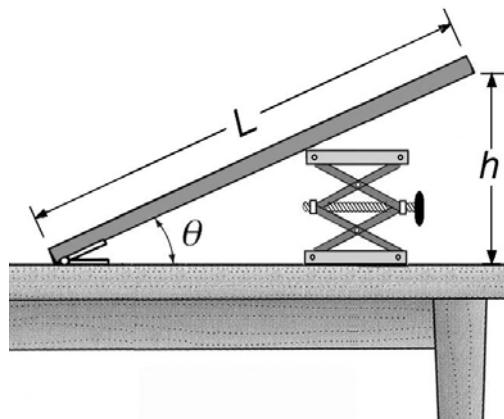
A5. Número de guisantes en una lata. Se tiene una lata llena de guisantes y se desea estimar el número de guisantes que hay en ella sin abrirla. La lata tiene forma cilíndrica de diámetro $d = (10,6 \pm 0,1)$ cm y altura $h = (16,3 \pm 0,1)$ cm. Los guisantes se consideran esféricos de diámetro $d = (5,8 \pm 0,2)$ mm.
 ¿Cuántos guisantes diría Ud. que hay en esa lata? Si Ud. supone que *todo* el volumen de la lata está disponible para los guisantes ¿estarán sus cálculos libres de un error sistemático?

A6. La velocidad del sonido. En una práctica de laboratorio para medir la velocidad del sonido en el aire, se envía un pulso de onda sonora a lo largo de un tubo cerrado en un extremo. La longitud del recorrido del pulso ida y vuelta en el tubo es $L = (2,07 \pm 0,01)$ m. En la tabla se muestra el resultado de 8 mediciones del tiempo total registrado de ida y regreso del pulso.

Tiempo (s)	0.00611	0.00620	0.00619	0.00617	0.00615	0.00615	0.00614	0.00623
------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

¿Qué valor reportaría Ud. para la velocidad del sonido?

A7. Error en el ángulo de elevación de un plano inclinado: En una práctica para determinar el coeficiente de fricción estático, se coloca un bloque encima de un plano inclinado, cuya elevación se va gradualmente incrementando hasta que el cuerpo empiece a deslizarse. El coeficiente de fricción estático se obtiene a partir del valor del ángulo crítico. Este ángulo se determina midiendo con una regla, la altura h y la longitud L del plano inclinado:

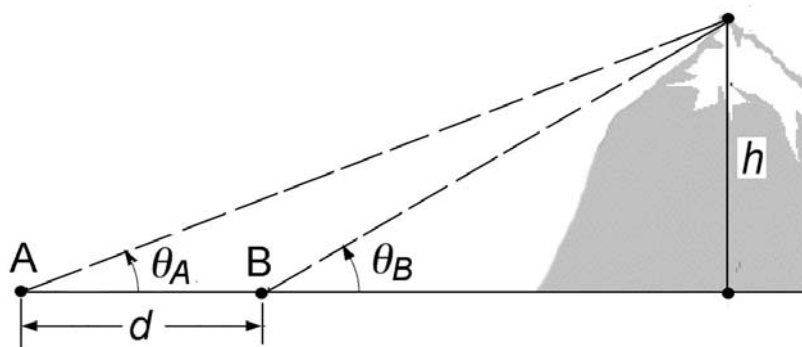
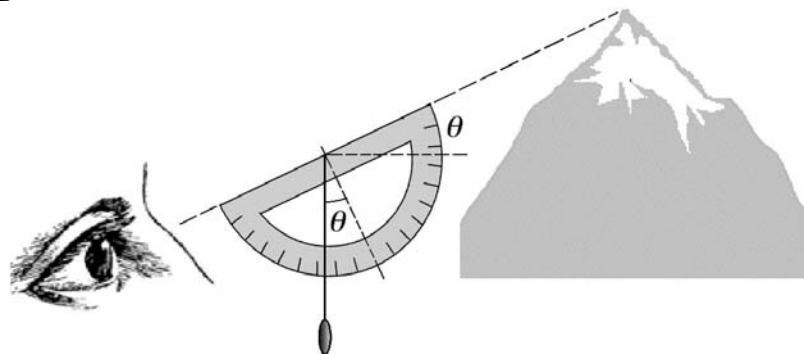


$$\theta = \arcsen(h/L)$$

a) Calcule el ángulo θ con su respectivo error para los siguientes valores medidos de las longitudes: $h = (30,5 \pm 0,1)$ cm y $L = (50,0 \pm 0,1)$ cm.

b) Calcule el valor del coeficiente de fricción estática con su respectivo error aplicando la expresión: $\mu_e = \tan\theta$.

A8. Midiendo la altura de una montaña: Un alumno desea determinar la altura del pico de una montaña, usando un transportador y un hilo con una piedra suspendida (plomada). Para ello, se ubica en una posición inicial A, alinea el borde recto del transportador hacia la punta de la montaña y mide el ángulo de elevación inicial, θ_A . Luego, después de caminar en un terreno plano y en línea recta hacia la montaña una distancia d , se detiene en la posición B. Allí mide el nuevo ángulo de elevación, θ_B .



a) Verifique la siguiente expresión para la altura h de la montaña respecto al suelo:

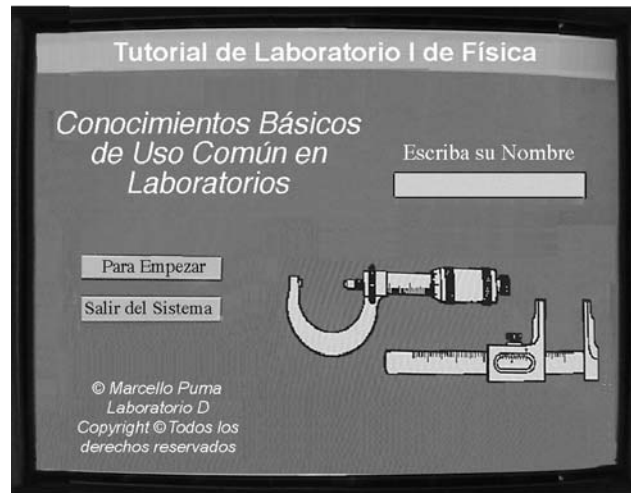
$$h = \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_A \operatorname{tg} \theta_B}{\operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_A} \right) d$$

b) Si las mediciones arrojan los siguientes valores:

$$\theta_A = 15,0^\circ \pm 0,5^\circ, \quad \theta_B = 18,5^\circ \pm 0,5^\circ, \quad d = (30,5 \pm 0,1) \text{ cm.}$$

Determine la altura de la montaña con su respectivo error.

- A9.** Espere las instrucciones del profesor antes de pasar a hacer uso del programa “Tutorial de Física” en el computador personal.



REFERENCIAS

1. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, Phillip R. Bevington (McGraw-Hill, 1969).
2. *An introduction to error analysis*, John R. Taylor (University Science Books, 1997)
3. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/unidadMedida.htm>

PRÁCTICA DE LABORATORIO I-02

EL TIEMPO DE REACCIÓN

OBJETIVOS

- Determinar el tiempo de reacción en un proceso con estímulo visual y respuesta motora-muscular.
- Estudiar la influencia del tiempo de reacción en la medición de un intervalo de tiempo.

MATERIALES

1. Regla de 100 cm.
2. Cronómetro.
3. Unidad emisora de pulsos luminosos con el intervalo controlable.

TEORÍA

La respuesta de un individuo a un estímulo es un proceso complejo. En primer término se debe percibir el estímulo por medio del aparato sensitivo (ojo, oído, tacto,..). Luego esta información es transmitida por medio del sistema nervioso al cerebro, donde ella es procesada para generar una respuesta. Finalmente, en forma de impulsos eléctricos, del cerebro se envían comandos de acción a las distintas partes del cuerpo, que deben reaccionar. Este proceso es realizado por el organismo en forma automática, pero, por las limitaciones del mismo, debe transcurrir un tiempo finito entre el instante en que se da el estímulo y el instante en que se ejecuta la acción. Este tiempo de retraso es lo que se conoce como *tiempo de reacción*.

Tener en cuenta el tiempo de reacción es muy importante para respuestas que apremian, como por ejemplo, el frenado de un automóvil cuando visualizamos un obstáculo en el camino o cuando un atleta en la línea de partida debe empezar la carrera después de escuchar la señal. En el caso de mediciones de intervalos relativamente cortos, también el tiempo de reacción puede ser una de las principales fuentes de error. Por tal razón, cuando se planifica un experimento se debe tomar en consideración este retraso en el tiempo.

Cuando deseamos medir un intervalo de tiempo, si la misma persona acciona el cronómetro de la misma manera, tanto al inicio como al final del intervalo, el tiempo de retraso en el accionar del cronómetro tiende a cancelarse. De esta forma se minimiza el error sistemático que afectaría la exactitud de la medida y sólo quedaría el error asociado a la falta de precisión en la medida, por la variación del tiempo de repuesta en diferentes ensayos.

Supongamos que se desea medir el intervalo de tiempo que transcurre entre dos eventos. Haciendo uso de un cronómetro podemos tener el tiempo inicial T_i y el tiempo final T_f . El intervalo de tiempo entre los dos eventos que se miden, $T_{i \rightarrow f}$, será:

$$T_{i \rightarrow f} = T_f - T_i \quad (1)$$

Ahora, tenemos que tomar en cuenta que estas mediciones están afectadas por el tiempo de reacción T_r , del observador, i.e.,

$$T_i = T_{vi} + T_r \quad (2)$$

$$T_f = T_{vf} + T_r \quad (3)$$

Donde T_{vi} y T_{vf} son los tiempos verdaderos del inicio y fin del intervalo. Reemplazando estos valores en la ecuación original, tenemos:

$$T_{i \rightarrow f} = (T_{vf} + T_r) - (T_{vi} + T_r) = T_{V(i \rightarrow f)} \quad (4)$$

con lo cual queda demostrado que efectivamente los retrasos debidos al tiempo de reacción se cancelan y no afectan la medición del intervalo.

Veamos ahora qué sucede con la propagación de errores en este tipo de medida. El error en la medida del intervalo, $\Delta T_{i \rightarrow f}$, viene dado por

$$\Delta T_{i \rightarrow f} = \Delta T_f + \Delta T_i \quad (5)$$

A su vez, los errores en los intervalos ΔT_f y ΔT_i , de acuerdo a su expresiones dadas anteriormente, son iguales al error en la determinación del tiempo de reacción, ΔT_r . En esto hemos supuesto que el tiempo de reacción del observador es el mismo en la determinación de los tiempos de inicio y culminación del intervalo, y que cualquier otra fuente de error es despreciable. Por lo tanto,

$$\Delta T_{i \rightarrow f} \approx 2 \times \Delta T_r \quad (6)$$

con lo cual vemos que, si bien el tiempo de reacción no afecta la medida del intervalo, el error en esta medida sí está determinado por el error en el tiempo de reacción.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

- a) Resuma en sus propias palabras el procedimiento a seguir para determinar el tiempo de reacción de una persona a partir de la distancia que recorre un objeto en caída libre antes de sostenerlo. ¿Qué aproximaciones están implícitas? ¿Cuáles considera relevantes?
- b) Exprese el error del tiempo de reacción obtenido de esta manera en términos de la aceleración de gravedad, g , la distancia caída, X , y el error en la determinación de la distancia, ΔX .

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

A. Determinación del tiempo de reacción

Se trata de determinar la distancia que en cae libremente un objeto si nos proponemos detenerlo tan pronto como observamos que se inicia la caída.

- A1.** Mientras un miembro del equipo sujeta la regla en forma vertical, por el extremo superior, el otro se prepara alineando la parte inferior de su mano con *un punto* inferior de la regla, manteniendo los dedos abiertos, de forma tal que la regla quede libre.
- A2.** Sin previo aviso, el primero suelta la regla, y el segundo tratará de sujetarla tan pronto vea que se inicia la caída.

- A3.** Repita 20 veces el proceso de medición de la distancia en que cae la regla antes de que pueda detenerla.
- A4.** En todas las mediciones, asegúrese de tener siempre la misma marca de referencia en la regla y que su mano permanezca horizontal. De la misma manera, evite tratar de adivinar o adelantar su reacción al inicio de la caída libre de la regla.

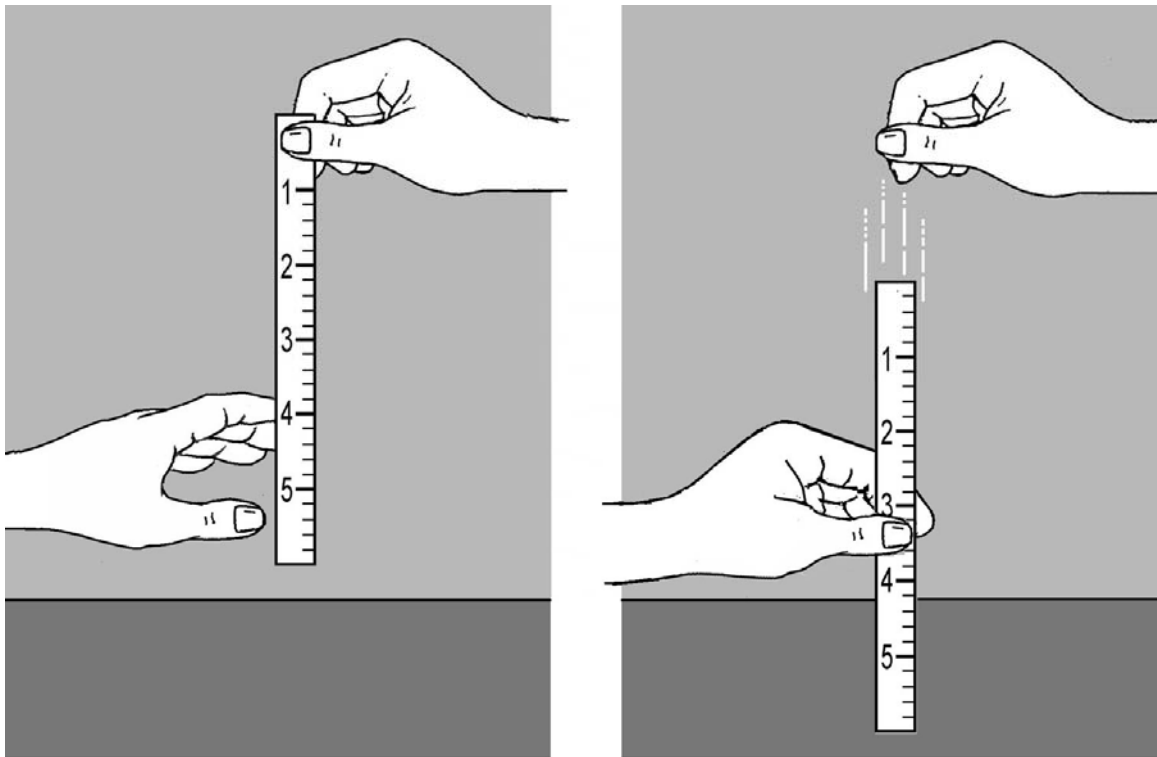


Fig. 1: Medición del tiempo de reacción.

- A5.** Construya una tabla con los resultados de las diferentes medidas. Haga la tabla como se indica a continuación para que la misma le sirva para sus cálculos más adelante.

Tabla 1

i	X_i		
1			
.....			
N			

- A6.** Repita todo el procedimiento anterior intercambiándose los miembros del equipo en las funciones de soltar y sujetar la regla.
- A7.** Cada miembro del equipo, usando su tabla de valores, calcule la distancia media de caída de la regla y la desviación estándar correspondiente de esta distancia, para lo cual se recomienda usar las dos columnas restantes de la tabla anterior.

Tabla 2

i	X_i	$X_i - \langle X \rangle$	$(X_i - \langle X \rangle)^2$
1			
.....			
N			
$\langle X \rangle = \dots\dots\dots$		$\sigma = \dots\dots\dots$	

Escriba la distancia de caída media, $\langle X \rangle$, de la regla y su correspondiente error, ΔX .

- A8.** Usando la expresión para un movimiento lineal acelerado, partiendo del reposo, y tomando el valor de $g = 9.777828 \text{ m/s}^2$, calcule el tiempo promedio de caída de la regla, $\langle Tr \rangle$, y su correspondiente error, ΔTr . Este valor es el tiempo de reacción, promedio e individual, de cada uno de los miembros del equipo.

Escriba su tiempo de reacción y el correspondiente error en su informe, y cópielo en la tabla que tiene en la pizarra el profesor.

- A9.** Cuando se complete la tabla de la pizarra, cópiela y calcule el tiempo de reacción medio y el error correspondiente para la población de individuos que fija su profesor.

Compare los tiempos de reacción de los grupos. ¿Existe alguna diferencia? ¿Por qué?

B. Determinación de la duración de un intervalo de tiempo

Se trata de determinar la duración del intervalo de tiempo que transcurre entre dos destellos sucesivos emitidos por la fuente luminosa.

- B1.** Usando el cronómetro, mida el tiempo que transcurre entre dos encendidos consecutivos de la luz en la unidad de pulsos que manejará el instructor. De

nuevo, es importante que no trate de anticiparse o adivinar cuándo ocurrirá el encendido de la luz. El otro miembro del equipo escribirá la tabla para el compañero que está realizando las mediciones.

- B2.** Repítase la medición 20 veces y construya una tabla de valores con los tiempos medidos tal como se indica a continuación:

Tabla 3

i	$T_{f \rightarrow i}^{(i)}$		
1			
.....			
N			

- B3.** Repita todo el procedimiento anterior intercambiándose los miembros del equipo en las funciones de medir el tiempo y tomar los datos.

- B4.** Cada miembro del equipo, usando la tabla de valores con sus mediciones, calcule el tiempo medio entre destellos y el error en la media correspondiente, de este intervalo. Para esto se recomienda usar las dos columnas restantes de la tabla anterior.

Tabla 4

i	$T_{f \rightarrow i}^{(i)}$	$T^{(i)} - \langle T \rangle$	$(T^{(i)} - \langle T \rangle)^2$
1			
.....			
N			

$\langle T_{f \rightarrow i} \rangle = \dots\dots\dots$
 $\sigma = \dots\dots\dots$

Escriba la duración media del intervalo entre dos destellos, $\langle T_{f \rightarrow i} \rangle$, y su correspondiente error, $\Delta T_{f \rightarrow i}$ y cópielo en la tabla que tiene en la pizarra el profesor.

Cuando se complete la tabla de la pizarra, cópiela y calcule la duración media del intervalo y el error correspondiente.

- B5.** Compare el resultado obtenido con el valor del intervalo de tiempo que ha prefijado el instructor en la unidad generadora de pulsos.

Discuta sus resultados en términos de la exactitud y precisión del mismo.

PREGUNTAS

1. Enumere algunos factores que pueden influir en el tiempo de reacción de una persona.
2. Discuta las posibles fuentes de error en la determinación de caída de la regla. Explique cómo y en que medida influyen: la apreciación de la regla, la incertidumbre en la posición inicial, la anticipación al soltarla o cualquier otro factor que Ud. considere pertinente.
3. Discuta las posibles fuentes de error que afecten la determinación del intervalo de tiempo usando el cronómetro. Diga cómo influye la apreciación del cronómetro en comparación con el tiempo de reacción.
4. Discuta la suposición hecha sobre la igualdad del tiempo de reacción para arrancar y detener el cronómetro.
5. El tiempo de reacción que hemos estudiado se refiere a una respuesta ante un estímulo *visual*. Sugiera un experimento en el que se pueda medir una reacción ante un estímulo *auditivo*. ¿Esperarías un tiempo menor de respuesta ante un estímulo presentado en la modalidad auditiva que en otro en la modalidad visual?

REFERENCIAS

1. D. A. Wardle, *The time delay in human vision*, Phys. Teach. 36, 442 (1998).
2. <http://www.phys.hawaii.edu/~teb/java/ntnujava/Reaction/reactionTime.html>
3. <http://getyourwebsitehere.com/jswb/rttest01.html>

MEDICIÓN DE LA DENSIDAD DE UN SÓLIDO

OBJETIVOS

- Entender cómo funciona un vernier y aprender a usarlo.
- Combinar las mediciones de volumen y masa para determinar la densidad de un cuerpo.
- Aplicar el principio de Arquímedes para determinar la densidad del cuerpo, por mediciones de peso, utilizando un dinamómetro.
- Calcular la propagación de los errores en las mediciones de densidad por medio de los dos métodos experimentados y comparar sus resultados.

MATERIALES

1. Cuerpo problema
2. Vernier
3. Balanza
4. Dinamómetro
5. Vasija con agua.

TEORÍA

I. Introducción

La medición precisa de longitudes para determinar el área y volumen de un cuerpo sólido es un proceso muy importante. Si el cuerpo es un sólido rígido, es decir, indeformable, la medición (con los instrumentos adecuados) podrá fácilmente alcanzar errores relativos en el orden de 10^{-3} . Sin embargo, si el cuerpo sólido es deformable, debemos ser más cuidadosos para asegurarnos que se están midiendo correctamente

las dimensiones requeridas. En esta práctica se determinará la densidad de un sólido deformable utilizando dos métodos diferentes:

- a) Por la medición directa de su volumen y de su masa.
- b) Utilizando el principio de Arquímedes.

El sólido cuyo volumen se desea determinar es de goma y tiene la forma de un cono truncado con un hueco cilíndrico que no llega a atravesarlo (Figura 1).

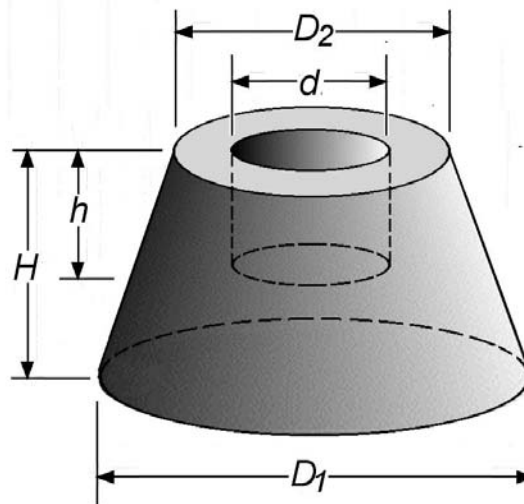


Fig. 1: Cono truncado con sección cilíndrica interna hueca

Debemos medir las siguientes cantidades: Diámetro mayor (D_1), diámetro menor (D_2), altura (H), diámetro del hueco (d) y profundidad del hueco (h). Usted deberá demostrar primero que el volumen del cuerpo está dado por la expresión:

$$V = \frac{\pi H}{12}(D_2^2 + D_2 D_1 + D_1^2) - \frac{\pi h d^2}{4}. \quad (1)$$

II. El vernier y su principio de funcionamiento

Cuando usamos una regla para realizar una medida, solo podemos apreciar hasta la división más pequeña de su escala. Para poder distinguir valores mas pequeños entre dos marcas consecutivas, se ha ideado una segunda escala que se denomina nonio. El vernier es un instrumento fabricado de metal (acero inoxidable) o de plástico duro, que está constituido por una regla fija graduada en partes iguales, sobre la que puede deslizarse el nonio, que es una reglilla graduada de tal forma que $(n - 1)$ divisiones de la regla se dividen en n partes iguales del nonio.

En el caso más sencillo $n = 10$, se toman 9 divisiones de la regla fija y se divide en 10 partes iguales del nonio, así cada una de estas partes es $9/10$ de un intervalo de la regla fija (Fig. 2).

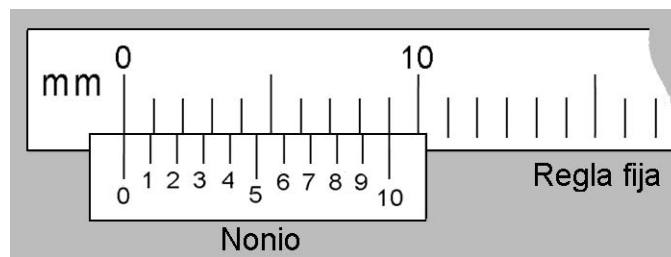


Fig. 2: Un nonio con 10 divisiones por cada 9 divisiones de la escala fija

Para ilustrar el principio de funcionamiento del vernier, consideremos la figura 3.

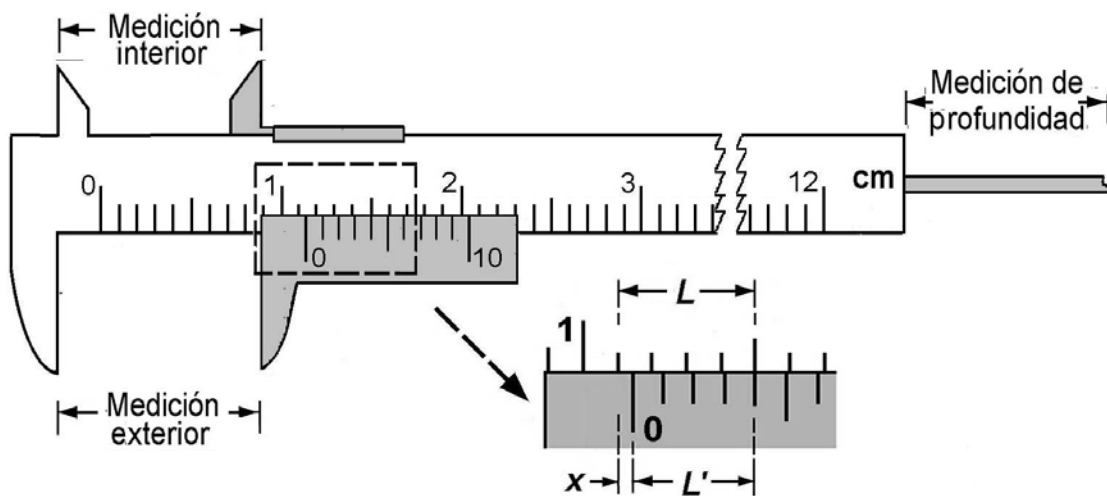


Fig. 2: La lectura del vernier es 11,4 mm = 1,14 cm

Podemos observar, que el cero del nonio está entre las divisiones de 11 mm y 12 mm de la escala fija. Para calcular el valor de la fracción excedente a los 11 mm, se observa cuál es la división del nonio que coincide exactamente con una división de la escala principal. En este caso dicha división es *la cuarta*, luego la fracción del intervalo es $4/10$ de mm y la lectura correspondiente es 11,4 mm. La razón de esto es que la fracción x buscada es la diferencia entre la longitud L sobre la escala principal y la longitud L' sobre el nonio:

$$x = L - L' = 4\text{mm} - \frac{9}{10}(4\text{mm}) = \frac{1}{10}(4\text{mm}) = 0,4\text{mm}$$

Por lo tanto, el incremento, $x = 0,4$ mm, es lo que se debe añadir a la marca de 11 mm para obtener la lectura final de "11,4 mm".

Lo que determina la apreciación del vernier es el número de divisiones del nonio. La *apreciación* del aparato será la apreciación de la regla principal entre el número de divisiones del nonio. En el caso anterior, la apreciación lograda en la medición es de $1/10$ mm (0,1 mm). En otros verniers de mas precisión, el numero de divisiones del nonio puede ser 20 o 50, siendo las apreciaciones $1/20$ mm (0,05 mm) o $1/50$ mm (.0,02 mm), respectivamente.

Observe en la Fig. 3 que el vernier dispone de tres opciones de medición, dependiendo de la accesibilidad que se tenga de la dimensión en el objeto a medir: exterior, interior y profundidad. Los ejemplos a continuación ilustran como se utilizan estas tres modalidades.

Ejemplo 1: *Se desea medir la longitud de un tornillo* (Fig. 3): El cero de la escala del nonio coincide con la marca de 28 mm. Como la marca del nonio que coincide con alguna marca de la escala fija es "0"; entonces la lectura es: 28,0 mm.

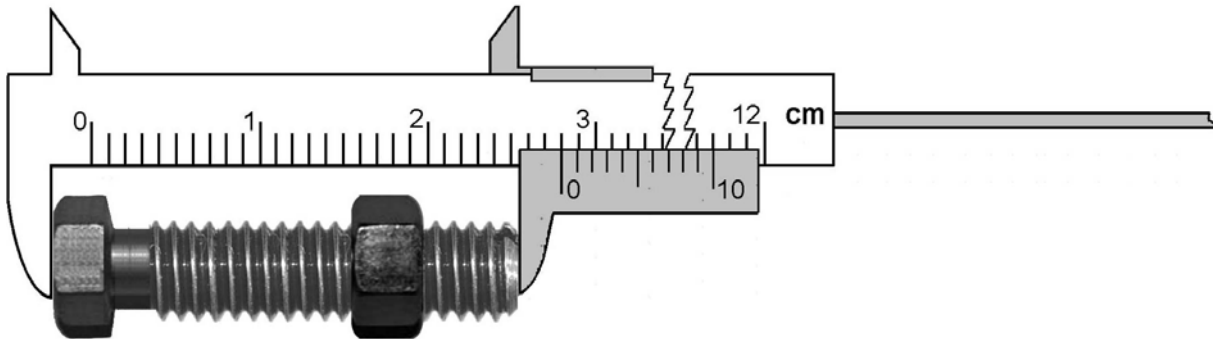


Fig. 3: La lectura del vernier es 28,0 mm = 2,80 cm.

Ejemplo 2: *Se desea medir el diámetro interno de una tuerca* (Fig. 4): El cero de la escala del nonio está entre 8 mm y 9 mm. La marca del nonio que coincide con alguna marca de la escala fija es "6"; Por lo tanto, la lectura es: 8,6 mm.

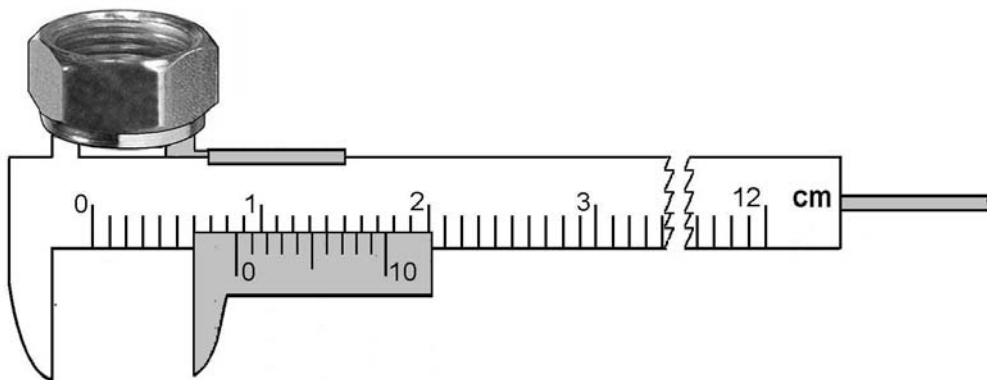


Fig. 4: La lectura del vernier es 8,6 mm = 0,86 cm

Ejemplo 3: Se desea medir la profundidad de la tapa de un frasco (Fig. 5): El cero de la escala del nonio está entre 9 mm y 10 mm. La marca del nonio que coincide con alguna marca de la escala fija es: "2"; Por lo tanto, la lectura es: 9,2 mm.

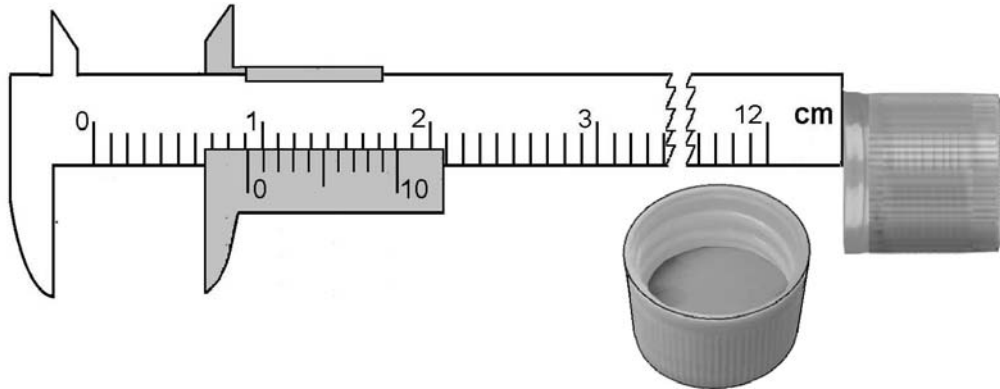


Fig. 5: La lectura del vernier es 9,2 mm = 0,92 cm

III. El Principio de Arquímedes

Un fenómeno común que se observa cuando un cuerpo se encuentra sumergido en un líquido es que existe una fuerza ascendente de flotación (o empuje) que se opone a la tendencia del cuerpo a hundirse en el líquido. El principio de Arquímedes afirma que: *"la magnitud de la fuerza ascendente en el seno de un líquido es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo sumergido"*.

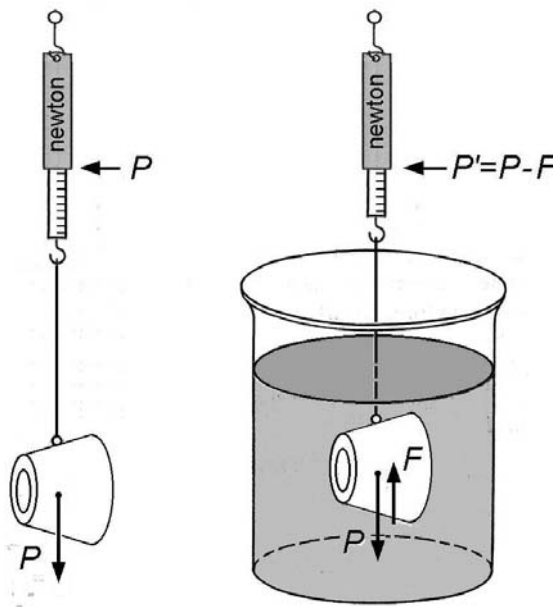


Fig. 6: Cuerpo sujeto con un dinamómetro en el aire y en un líquido

Para calcular la magnitud de la fuerza de flotación, F , que contrarresta el peso P del cuerpo sumergido, se calcula el volumen V del líquido desplazado que corresponde al volumen del cuerpo sumergido. Así, si las densidades del cuerpo y del líquido son ρ_c y ρ_l respectivamente, la fuerza de empuje es

$$F = \rho_l V g, \quad (2)$$

Como la densidad del cuerpo es $\rho_c = m/V$, podemos escribir:

$$F = \rho_l m g / \rho_c. \quad (3)$$

Luego, el peso aparente P' del cuerpo sumergido es:

$$P' = P - F = mg - \frac{\rho_l}{\rho_c} mg = P \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right) \quad (4)$$

Donde se supone que la densidad del cuerpo es mayor que la del líquido ($\rho_c > \rho_l$). En caso contrario el cuerpo flotaría en la superficie del líquido, y el análisis anterior debe modificarse con la finalidad de determinar el volumen o porción del cuerpo que se encuentra fuera del líquido.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

1) Utilizar el cálculo integral para obtener la fórmula del volumen de un cono recto truncado con diámetros D_1 (mayor), D_2 (menor) y altura H .

2) En el vernier mostrado en la figura 7, el nonio tiene una escala de 20 divisiones que ocupan una longitud de 39 divisiones de la escala fija (en mm).

a) ¿Cuál es la apreciación de este vernier?

b) ¿Cuál será la lectura?



Fig. 7: Un nonio con 20 divisiones por cada 39 divisiones de la regla fija

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

A. Programa tutorial

- A1.** Se realizará una sesión de práctica en computadora con el programa tutorial para aprender a realizar lecturas con el vernier antes de proceder a iniciar la parte experimental.

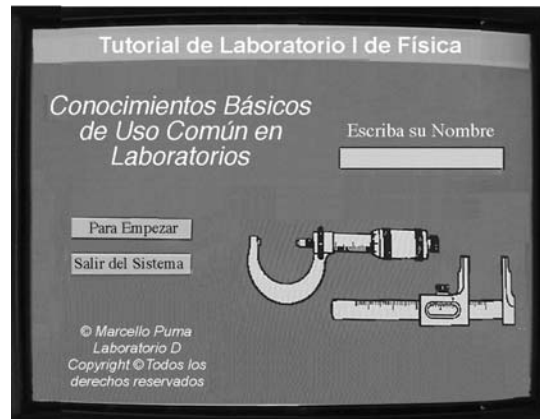


Fig.8: Programa tutorial de la computadora

B. Determinación de la densidad por medio de mediciones de volumen y masa

- B1.** Tanto usted como su compañero deben realizar cada uno 5 mediciones independientes de las cantidades: D_1 , D_2 , d , H y h , y luego tabularlas incluyendo la apreciación de la escala (o los errores de estimación, en caso de que Ud. lo considere procedente). Estas mediciones deben realizarse con ayuda de las diferentes opciones del vernier diseñadas para medir cada tipo de dimensión, es decir: dimensiones interiores (d), dimensiones exteriores (D_1 , D_2 , H), y profundidades (h). En una hoja de cálculo copie los diversos parámetros medidos, de tal manera que pueda obtener sus promedios y sus errores estadísticos asociados.

Tabla 1

	d	$D1$	$D2$	H	h
1					
.....
5					
Promedios					
Desv. estándar					
Error					

B2. Aplicando la ecuación (1) procedan a calcular el volumen V del cuerpo y su error correspondiente, ΔV .

B3. A continuación cada alumno debe realizar 5 mediciones de *la masa* del cuerpo con la ayuda de *la balanza* y debe anotar sus resultados en una tabla, incluyendo su error.

Con las medidas efectuadas, calcule finalmente la densidad ρ_c del sólido y su error asociado $\Delta\rho_c$. Refleje los resultados obtenidos en la tabla 2.

Tabla 2

Volumen V :	
Error ΔV	
Masa m	
Error en la masa Δm	
Densidad ρ_c	
Error en densidad $\Delta\rho_c$	

C. Determinación de la densidad por el principio de Arquímedes

C1. En esta parte de la práctica se determinará la densidad ρ_c , utilizando un *dinamómetro* para medir el peso del cuerpo P (en newton) y su peso aparente, P' (en newton), cuando está sumergido en agua. Al introducir el cuerpo en el agua debe procurarse que quede completamente sumergido y que no toque ni el fondo ni las paredes del envase (Figura 5).

C2. Realice 5 mediciones de P y de P' y utilice la formula correspondiente para calcular el valor de la densidad del cuerpo ρ_c . Tome como valor para la densidad del agua: $\rho = 1,000 \text{ gr/cm}^3$. Se le aconseja tabular sus resultados de la misma manera que en la actividad anterior:

Tabla 3

Peso real P	Peso aparente P'
....
....
....
Promedio P	Promedio P'
ΔP	$\Delta P'$
Densidad ρ_c calculada:	
Error densidad $\Delta\rho$:	

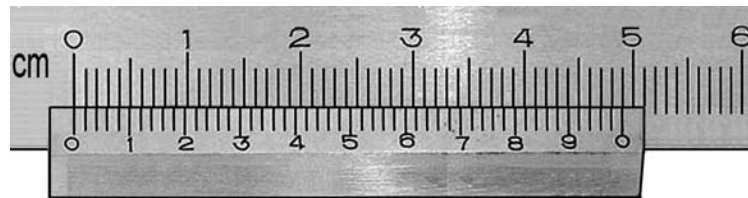
D. Presentación de resultados

D1. Realice el cálculo de propagación de errores y obtenga la expresión algebraica del error absoluto $\Delta \rho_c$ y del error relativo $\Delta \rho_c / \rho_c$. Calcule numéricamente estos errores y reporte el valor obtenido de la densidad ($\rho_c \pm \Delta \rho_c$).

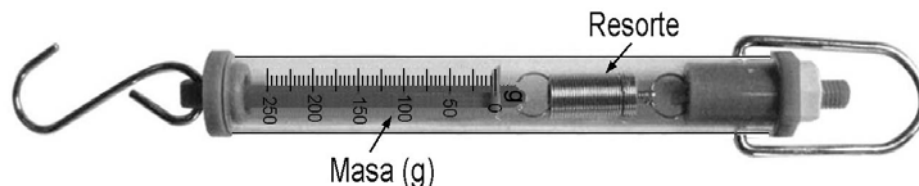
D2. Compare este resultado con aquel obtenido para la densidad usando el primer método.

PREGUNTAS

1. Indicar cuál debe ser la precisión del número π más apropiada para esta práctica e indicar la razón de su elección.
2. ¿Cuál sería la apreciación de un vernier con el nonio indicado en esta figura?



3. Comparar la precisión de las dos formas vistas en esta práctica para medir la densidad de un cuerpo; indicar cuáles son los parámetros más importantes que influyen directamente en la precisión de cada método de medición.
4. En el método usando el principio de Arquímedes si el dinamómetro utilizado en esta práctica no tuviera su escala calibrada en unidades de fuerza (newtons, dinas,...), el instrumento aun sin calibrar también podría servir para obtener el resultado buscado. Discutir cuál es la razón de ello.
5. El dinamómetro utilizado en esta práctica tiene al lado de su escala en *newtons*, una escala adicional que está graduada en *gramos*. Si se usa esta escala para medir la masa de un objeto aquí en Sartenejas, registraría este instrumento la misma masa cuando se mida en cualquier otro lugar de la Tierra?



REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Ed. Continental (1995).
2. R. A. Serway, *Física*, tomo. 1, tercera edición, Mc. Graw-Hill (1992).
3. <http://www.cca.org.mx/dds/web/ventana/ligas/nlaboratoriom19.htm>
4. http://www.her.itesm.mx/academia/profesional/cursos/fisica_2000/FISICA/fluidos/estatica/introduccion/Introduccion.htm

GRÁFICOS



Una imagen dice mas que mil palabras

OBJETIVOS

- Comprender los criterios que se utilizan para las representaciones gráficas de una data experimental y los métodos cualitativos para su análisis.
- Determinar los parámetros de la recta en una gráfica lineal (pendiente y ordenada en el origen).
- Determinar el error de los parámetros de una recta.
- Determinar cuando conviene utilizar escalas logarítmicas para linealizar una gráfica.
- Aprender a ajustar rectas mediante regresión lineal (mínimos cuadrados).

I. CONSIDERACIONES GENERALES

En las prácticas que hemos realizado hasta ahora se ha abordado el problema de medir una sola cantidad física. La incapacidad de reproducir la medida exactamente y la apreciación finita de los instrumentos llevó a la necesidad de repetir la medida hasta disponer de un conjunto sobre el cual se aplican métodos estadísticos.

En las prácticas siguientes vamos estudiar cómo se comporta una cantidad física al variar otros parámetros; el objetivo es establecer la dependencia funcional, esto es, la relación matemática que mejor describe al fenómeno. De manera recíproca, el interés podría ser también el de verificar experimentalmente un modelo predicho teóricamente o incluso, proponer otra teoría que explica mejor el fenómeno.

En estos casos, la información experimental se pone de manifiesto al representarla de manera *visual* mediante el uso de gráficos. De los mismos se puede deducir la relación matemática que vincule las variables involucradas. También es posible de un gráfico predecir por *interpolación* o por *extrapolación* comportamientos en valores o regímenes no explorados por la experimento mismo.

Hemos determinado en la práctica anterior, la densidad de un cuerpo con su correspondiente error asociado. En el contexto de la presente práctica estaríamos interesados en analizar situaciones que son las mas frecuentes en física, como lo es medir dos o mas cantidades que guardan alguna relación entre sí. Por ejemplo, estudiar cómo sería la variación de la densidad de un cuerpo en función de la temperatura; ésta tendría el rol de variable independiente de la experiencia.

II. CRITERIOS PARA LA ELABORACIÓN DE UN GRÁFICO

La inspección de los datos de una tabla es el punto de partida para la elaboración del correspondiente gráfico. Esto determinará la selección apropiada de las escalas e intervalos para los ejes de las ordenadas y de las abscisas, y el rango que abarcan las cantidades estudiadas. Por lo general se representa la *variable independiente* a lo largo del eje horizontal o *abscisa*; es usual que la variable independiente sea el parámetro de control de la experiencia. En el eje vertical u *ordenada*, se representa la *variable dependiente*.

En la elaboración de un gráfico debemos cuidar algunos detalles:

- En cada eje debe indicarse la cantidad física correspondiente y su unidad de medida. El gráfico tiene que estar acompañado con su respectivo título.
- La curva debe tener un trazado suave y sin quebraduras (Fig. 1), ya que es la representación gráfica de un fenómeno físico. La curva no necesariamente debe pasar por todos los puntos experimentales.

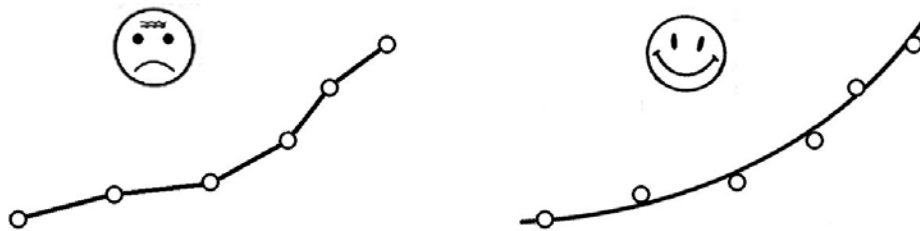
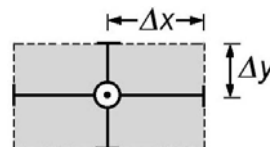


Fig. 1: Trazado de una curva por un conjunto de puntos

- Se debe indicar el error asociado a los puntos experimentales mediante el uso de *barras de error* que acotan la extensión del error alrededor del punto. En algunos casos, los errores pueden ser tan pequeños que son irrepresentables.

Fig. 2: Región de incerteza alrededor de un punto



- La curva debe pasar por la mayoría de las zonas de error, tratando de minimizar sus desviaciones y en lo posible, que los puntos experimentales queden uniformemente distribuidos a ambos lados de la curva.

III. DIFERENTES TIPOS DE GRÁFICOS

Cuando construimos una gráfica, lo primero que salta a la vista es la tendencia que sigue el conjunto de los puntos experimentales. Podría suceder que haya algún punto que no sigue la tendencia global de los demás, en estos casos se debería revisar si el punto ha sido dibujado en el lugar correcto o si es el producto de una medida realizada en forma incorrecta. En las situaciones más sencillas, los puntos podrían quedar alineados en una recta o seguir un patrón curvilíneo. En el primer caso el análisis es relativamente simple ya que se limita a determinar la pendiente de la recta y su intersección con el eje y . En el caso de que la tendencia sea curvilínea, se intenta primero aplicar alguna técnica de linealización de los datos para transformarla en una línea recta.

a) Gráficos lineales (papel milimetrado)

En la figura 3 presentamos el gráfico de una cantidad y en función de la cantidad x , que utiliza escalas *lineales* en sus dos ejes. En este caso, para hacer la representación a mano se utiliza un *papel milimetrado*.

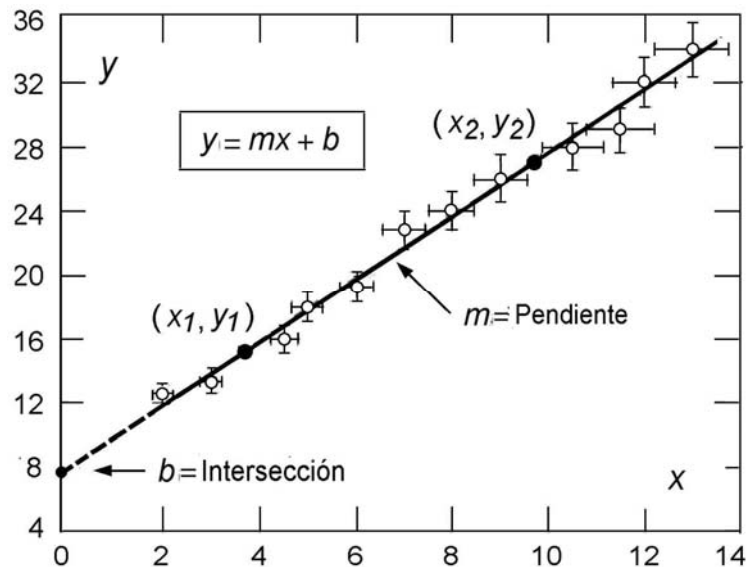


Fig. 3: Gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

Una vez representados los puntos experimentales con sus correspondientes barras de error en ambos ejes, determinamos alrededor de cada punto una zona de error (o región de observación) definida por un rectángulo. Note que los tamaños de las barras de error no tienen por qué ser iguales pues las magnitudes de los errores pueden ser diferentes para cada medida experimental.

De la figura 3 podemos ver que la curva descrita por los puntos experimentales es una recta. Es decir, la relación $y = f(x)$ entre las variables es una función lineal:

$$y(x) = mx + b$$

Donde x es la variable independiente, y es la variable dependiente, m es la pendiente de la recta y b es la intersección o valor de la ordenada cuando la abscisa x vale cero. La determinación de la relación funcional entre las variables se reduce a la determinación de las constantes m y b .

Dado que b es la ordenada en el origen, puede ser determinada extrapolando la recta hasta cortar el eje de las ordenadas cuando este último corresponde al cero del eje de las abscisas (línea punteada).

La pendiente m se determina tomando dos puntos cualesquiera *de la recta* (no dos puntos experimentales) y evaluando la relación:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Las constantes m y b que hemos determinado cuentan con sus respectivos errores asociados, dado que está abierta la posibilidad de trazar más de una recta para el conjunto de puntos experimentales.

Estos errores Δm y Δb se pueden determinar trazando las dos rectas extremas de máxima y mínima pendientes que estén dentro de las zonas de error de los puntos experimentales (Fig. 4). Los valores de las constantes m y b , correspondientes a cada una de estas rectas se obtienen siguiendo el procedimiento antes expuesto.

De esta manera quedan determinados los errores asociados a las constantes:

$$\Delta m = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2} \quad \Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} \quad (2)$$

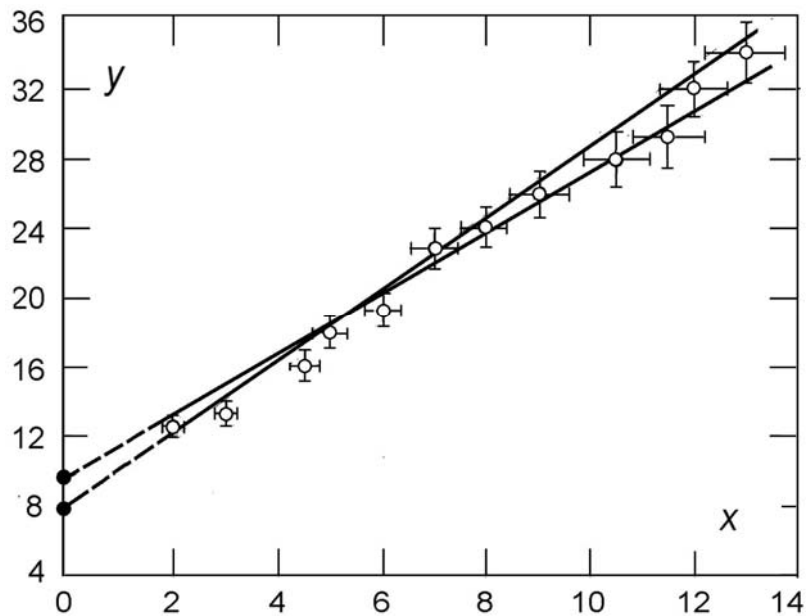


Fig. 4: Rectas de máxima y mínima pendientes para determinar los errores.

b) Gráficos no lineales y su linealización

Cuando la representación gráfica de un conjunto de datos no corresponde a una línea recta, el análisis de la curva para hallar la ecuación empírica que mejor se ajusta a éstos, podría resultar complicado. Existen varias maneras de lograrlo, según sea el caso. Si no disponemos de un modelo hipotético, podríamos probar con algunas funciones de ocurrencia muy común en fenómenos físicos, como lo son la función exponencial y la función potencial. En todo caso, la linealización se efectúa haciendo transformaciones matemáticas de la o las variables medidas.

b) Gráfico de una función potencial: Papel semi-log

Sea una función del tipo exponencial ($y = A 10^{Bx}$). Al tomar logaritmos en ambos lados se tiene la ecuación de una recta:

$$\log y = \log A + Bx$$

Esto sugiere usar una gráfica de $\log y$ en función de x (gráfico semi-log).

Consideremos los datos mostrados en la tabla de la figura 5 y su representación en una escala lineal o papel milimetrado.

x	y
0	1.000
1	1.995
2	3.981
3	7.943
4	15.84
5	31.62
6	63.10
7	125.9
8	251.2
9	501.1
10	1000
11	1995
12	3981

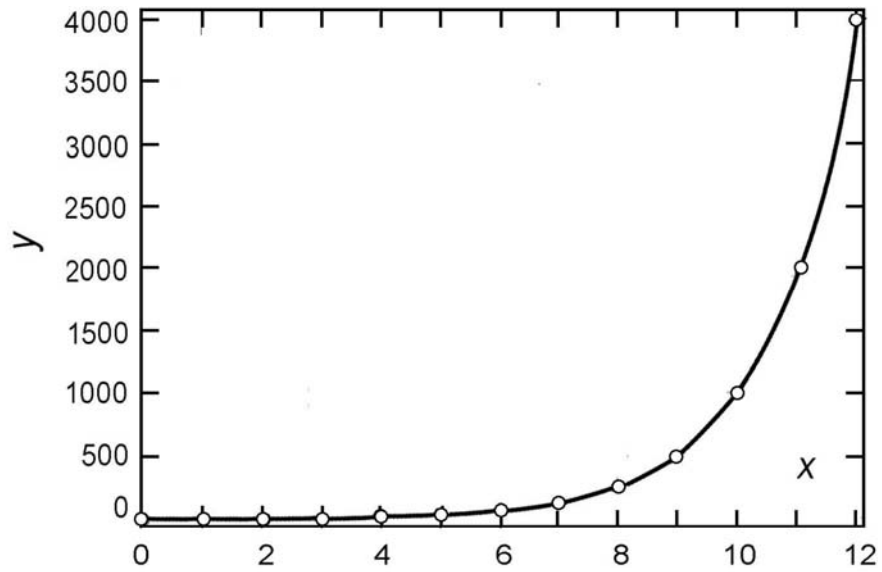


Fig. 5: Tabla de datos y gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

La inspección de esta data revela que los valores extremos de la variable dependiente, son $y_{min} = 1$ y $y_{max} = 3981$ y cubren 4 décadas (desde 10^0 hasta 10^4). La figura 6 presenta el resultado de graficar los mismos datos haciendo uso de una escala logarítmica para el eje de las ordenadas y una escala lineal para el eje x.

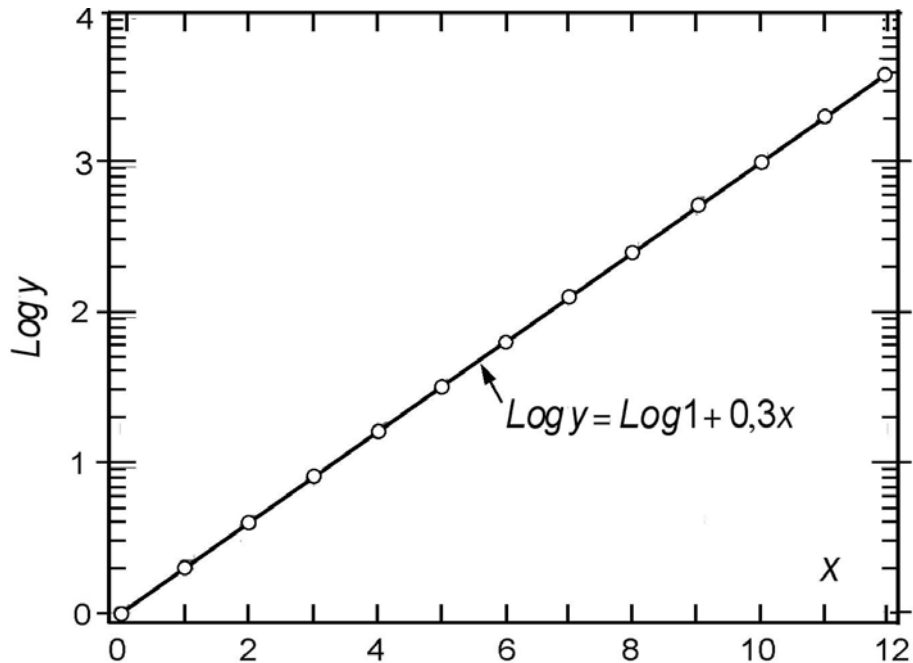


Fig. 6: Gráfico semilogarítmico o semi-log.

El gráfico revela ahora una dependencia lineal entre las variables. Siguiendo los procedimientos descritos y teniendo en cuenta que las ordenadas son ahora el logaritmo de la variable y , podemos determinar la ecuación de la recta:

$$\text{Log}y = \text{Log}1 + 0,3x \quad (3)$$

Tomando antilogaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene la función $y = f(x)$:

$$y = 10^{0,3x} \quad (4)$$

c) Gráfico de una función potencial: Papel log-log

Consideremos la forma general de una función potencial: $y = Ax^B$. Al tomar logaritmos a ambos lados se tiene la ecuación de una recta:

$$\text{log}y = \text{log}A + B\text{log}x$$

Lo que sugiere una gráfica de $\text{log}y$ en función de $\text{log}x$ (gráfico log-log).

Consideremos los datos mostrados en la tabla de la figura 7 y su representación en una escala lineal o papel milimetrado.

x	y
1	10
2	160
3	810
4	2560
5	6250
6	12960
7	24010
8	40960
9	65610
10	100000
11	146410
12	207360

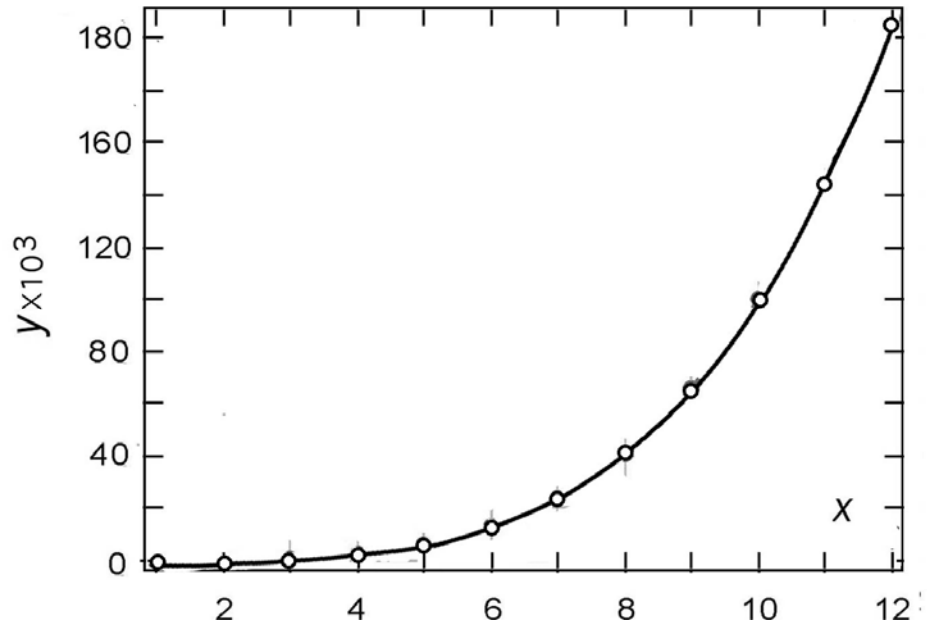


Fig. 7: Tabla de datos y gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

A simple vista esta curva parece tener la misma tendencia que la del gráfico de la figura 5. Sin embargo, luego de adoptar escalas logarítmicas en ambos ejes se revelará una dependencia lineal entre las variables x e y (Fig. 8).

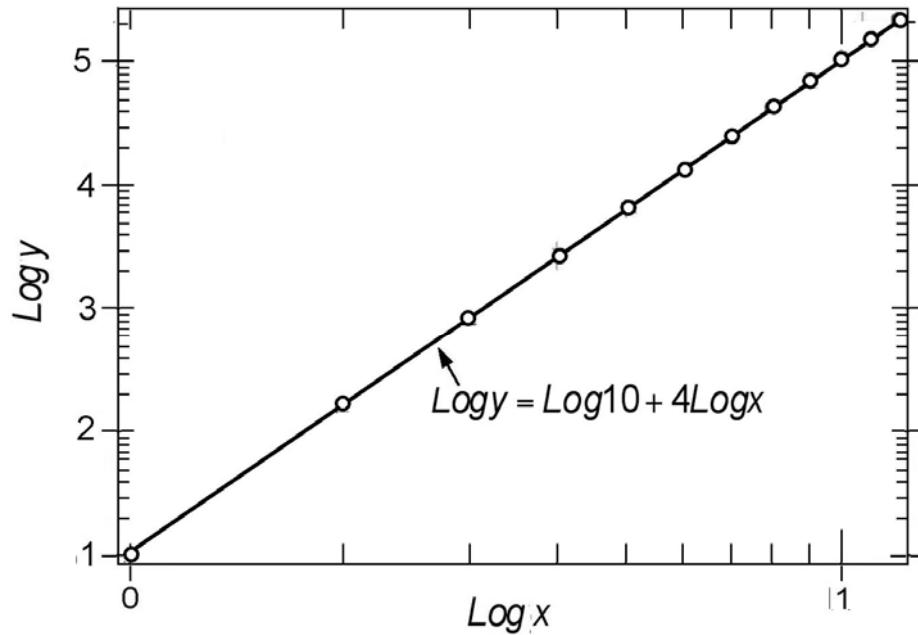


Fig. 8: Gráfico logarítmico log-log.

Usted puede verificar que la recta de la figura 8 obedece a la siguiente relación:

$$\text{Log } y = \text{Log } 10 + 4 \text{Log } x \quad (5)$$

Tomando antilogaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene la función, $y = y(x)$:

$$y = 10x^4 \quad (6)$$

Existe una gran variedad de casos donde es conveniente la representación gráfica en escala logarítmica. Su uso presenta varias ventajas, pues permite:

- Graficar información que abarca un amplio rango de valores.
- Revelar relaciones funcionales lineales entre las variables, en caso de que las mismas existan.
- Observar el detalle de comportamientos extremos que las escalas lineales ocultan y que podrían ser de interés especial.

Se suele usar la terminología *ciclos de la escala logarítmica* como sinónimo de décadas o número de órdenes de potencias de diez. Por ejemplo, si medimos distancias que van desde un milímetro hasta diez kilómetros, y la representamos en una escala logarítmica, abarcaríamos 7 décadas (Fig. 9). Podríamos decir que la escala logarítmica es la más *democrática*, ya que expande las regiones correspondientes a valores pequeños, en tanto que comprime las regiones de valores altos. Por ejemplo, el espacio reservado para valores entre 10^{-3} y 10^{-2} es igual que para el intervalo entre 10^3 y 10^4 .

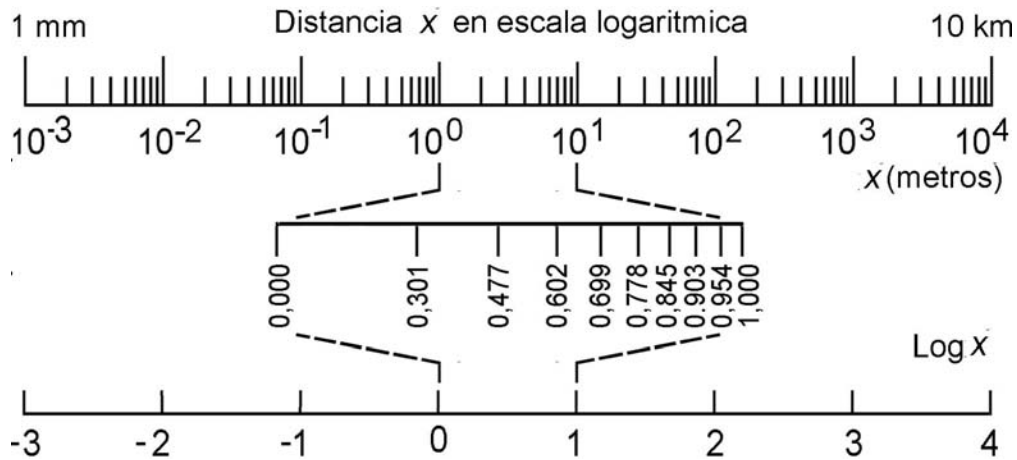


Fig. 9: Representación logarítmica de la distancia X

Para construir una gráfica con escalas logarítmicas tenemos tres opciones:

- Se puede emplear un *papel milimetrado*; en este caso usted deberá calcularle el logaritmo a los valores de la variable que se desee graficar.
- Se puede utilizar un *papel log-log* o *semi-log*. En este caso, "el papel se encargará por usted de sacar el logaritmo a los valores de la variable".
- Se puede hacer uso de una computadora y de un programa de análisis de datos que permita cambiar de una escala lineal a una logarítmica.

IV. Linealización de curvas por cambios de variable

Muchas ecuaciones no lineales que encontramos en física se pueden linealizar mediante un cambio apropiado de las variables que se grafican. Considere la siguiente tabla de datos (Fig. 10) que corresponde a mediciones de presión p (en atmósferas) en función del volumen V (en litros), de un gas a la temperatura ambiente. Podemos ver que la curva trazada se asemeja a una hipérbola:

$$pV = c, \quad c \text{ es una constante.}$$

$p(\text{Atm})$	$V(\text{mL})$
0,843	12,1
1,08	9,0
1,35	8,0
1,81	5,5
2,33	4,4
2,62	4,0
3,48	3,0

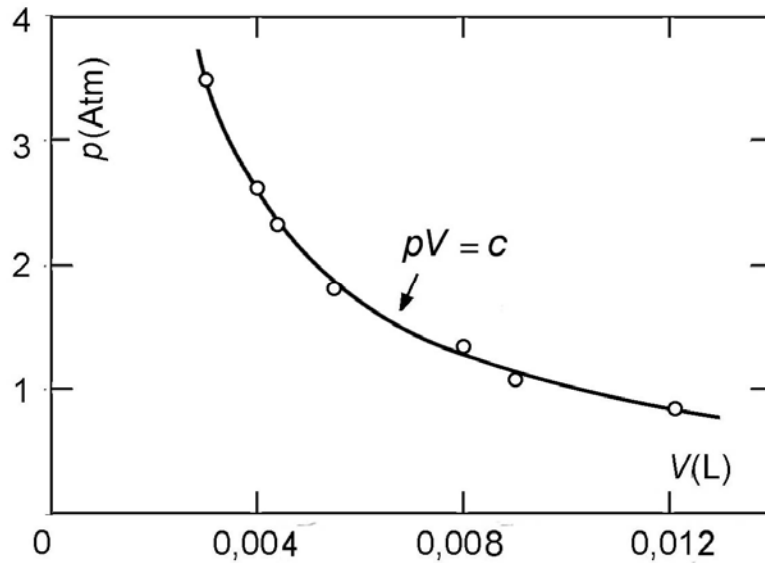


Fig. 10: Presión en función del volumen para un gas

Si ahora escribimos esta ecuación en la forma; $p = c(1/V)$, la misma corresponderá a una línea recta que pasa por el origen. Con la data transformada haremos ahora una segunda gráfica de p en función de $(1/V)$, ver figura 11.

Se observa que los puntos experimentales se pueden ajustar mediante una línea recta para obtener el valor de la pendiente. Si vamos al modelo teórico, aplicamos la ecuación de estado de un gas ideal, $pV = nRT$, siendo n el número de moles y R la constante universal de los gases, por lo tanto, el valor de la constante c obtenido de la pendiente correspondería a: nRT .

$p(\text{Atm})$	$1/V(\text{L})$
0,843	82,6
1,08	111
1,35	125
1,81	182
2,33	227
2,62	250
3,48	333

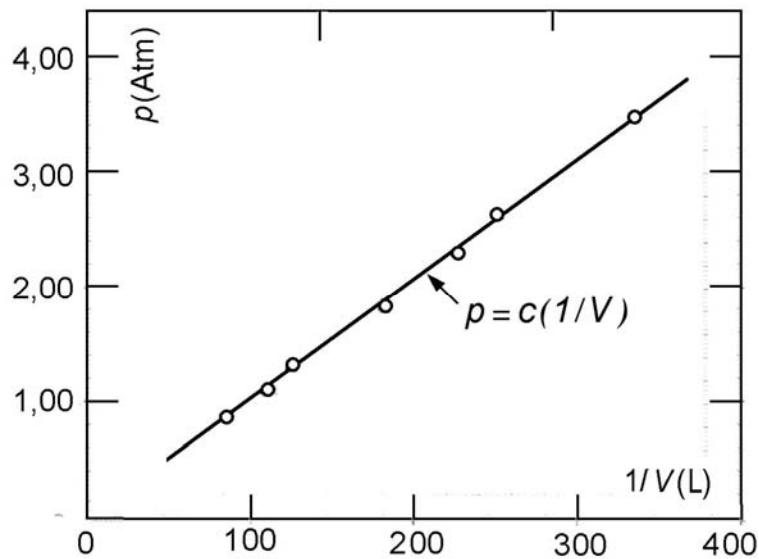


Fig. 11: Presión en función del inverso del volumen

V. AJUSTES DE CURVAS POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Hemos visto el método cualitativo de graficación y algunos criterios para el trazado de la curva que mejor refleje el comportamiento de una data experimental. También vimos la conveniencia de linealizar las curvas para que su análisis resulte sencillo. Los criterios para trazar una curva pueden ser muy subjetivos, ya que si le damos a dos personas el mismo conjunto de datos, lo más probable es que hagan pasar dos curvas distintas. Surge la pregunta: ¿cuál sería *la curva* que mejor se ajusta a esos datos? Para responder esta pregunta debemos recurrir al ajuste de la misma por métodos numéricos, esto es, a procedimientos mejor fundamentados teóricamente y que requieren del apoyo de herramientas de computación.

Toda curva se puede ajustar por métodos numéricos a un polinomio de grado n . Presentaremos a continuación el caso más simple: el ajuste a una función lineal, esto es, el ajuste a una recta que corresponde a un polinomio de grado uno. La técnica se conoce como el método de los *mínimos cuadrados* o método de *regresión lineal* y se fundamenta en el hecho de que el mejor ajuste se obtiene cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones de la variable dependiente alcanza su valor mínimo.

Para encontrar el valor mínimo de las desviaciones de la variable dependiente se varían ciertos parámetros. En el caso de una recta, los parámetros libres a variar son precisamente la pendiente m de la recta y el valor de la intersección b de la recta con el eje y . Se harán variar m y b , con el fin de encontrar los valores que correspondan a la recta que mejor se ajuste a los datos experimentales.

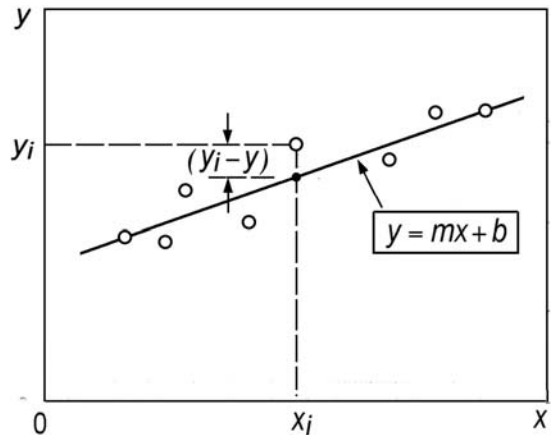


Fig. 12: Recta de mejor ajuste a la data

Consideremos la ecuación teórica que describe a la recta buscada,

$$y_i^{teo} = mx_i + b \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7)$$

Donde hemos introducido subíndices i pues estamos trabajando con un conjunto de N puntos discretos. El problema consiste en determinar los valores de m y b por la vía de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los datos experimentales, y_i , y los correspondientes a la recta ajustada, y_i^{teo} :

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^{teo})^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (mx_i + b)]^2 \quad (8)$$

Igualando a cero las derivadas de S con respecto a las variación de m y b , estamos aplicando la condición de extremos a la función S :

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{i=1}^N [-2y_i x_i + 2m x_i^2 + 2b x_i] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^N [-2y_i + 2m x_i + 2b] = 0 \quad (10)$$

Se puede demostrar por la vía de sacar la segunda derivada que éstas son condiciones de mínimo necesarias y suficientes. De las relaciones 9 y 10 se pueden obtener las expresiones para la pendiente m y la intersección b :

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (11)$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (12)$$

Estas son las expresiones para calcular los valores de los parámetros m y b de la recta que deben dar el *mejor ajuste* de los datos experimentales.

Los programas comerciales que se utilizan en los computadores personales para el análisis por mínimos cuadrados, incluyen los criterios para revelar *la calidad* del ajuste de los puntos a la recta. La bondad del ajuste lo determina el llamado *coeficiente de correlación*, R^2 , que se calcula mediante la expresión:

$$R^2 = \frac{(N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i)^2}{[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]} \quad (13)$$

El *coeficiente de correlación* R^2 puede tomar valores entre 0 y 1, siendo mejor el ajuste cuanto más próximo sea su valor a 1.

Los programas más sofisticados también suelen incluir la posibilidad de introducir la data con sus respectivos errores, lo que permite determinar los errores correspondientes en la pendiente m y la intersección b .

EJEMPLO 1: Análisis de la data del estiramiento de un Resorte

La data mostrada en la siguiente tabla corresponde a seis mediciones del estiramiento de un resorte que está fijo en un extremo, en función de la masa suspendida en su otro

extremo. Sin hacer la gráfica correspondiente, vamos a suponer *a ciegas*, que los puntos se ajustan en una línea recta, y a partir de esta data haremos *a mano* la *regresión lineal*. Para ello hemos calculado las sumatorias pertinentes a los fines de determinar la pendiente m y el punto de corte b , así como la calidad del ajuste, R^2 .

	N	1	2	3	4	5	6	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i$	$\sum y_i^2$	$\sum x_i y_i$
Masa (g)	x	200	400	500	700	900	1000	3700	$2,75 \times 10^6$	1068	$2,28 \times 10^5$	$7,92 \times 10^5$
Est.(mm)	y	58	120	140	208	252	290	1068	$2,28 \times 10^5$			

Después de sustituir estas sumatorias en las expresiones (11) (12) y (13), se obtuvieron los siguientes resultados:

Pendiente: $m = 0,285 \text{ mm/g}$ Intersección: $b = 2,35 \text{ mm}$ Coef. Correlación: $R^2 = 0,997$

Veamos ahora lo que nos da la computadora. Después de introducir la misma data en una hoja de cálculo y construir la gráfica, se obtuvo el siguiente resultado

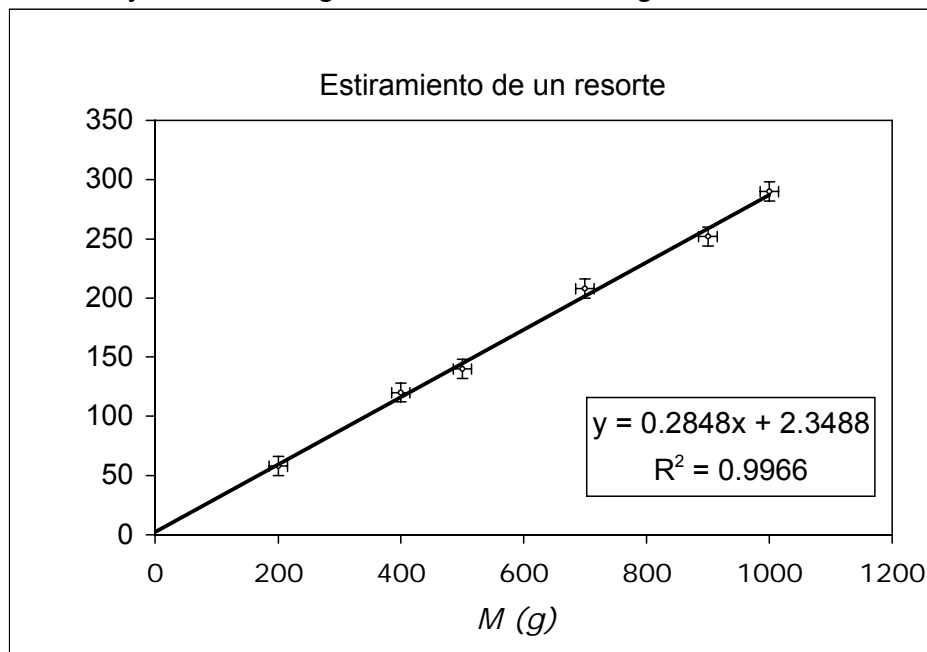
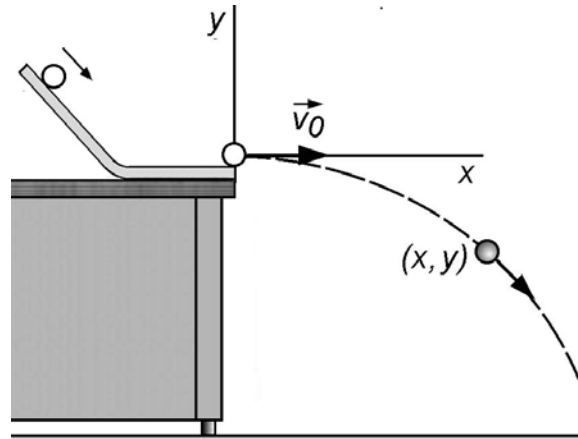


Fig. 13: Estiramiento de un resorte en función de la masa suspendida

Observamos que los valores de los parámetros m y b del análisis por mínimos cuadrados, dados por la computadora coinciden con los que ya habíamos encontrado. En particular, la cercanía del valor de R^2 a la unidad nos indica que existe una muy buena correlación entre la recta ajustada y la data experimental.

EJEMPLO 2: Análisis de la data de un movimiento en dos dimensiones

Se suelta una esfera desde cierta altura por una rampa, de modo que al abandonar el filo de la mesa con una velocidad horizontal, la esfera sigue hacia el suelo en caída libre. Fijando la altura de caída y observando el punto de impacto sobre una pantalla vertical que se va colocando a distintas distancias x , se registra el correspondiente descenso vertical y .



La data obtenida está mostrada en la siguiente tabla, y se desea determinar:

- La relación funcional $y = f(x)$
- La velocidad inicial horizontal v_0 .

Fig. 14: Movimiento en el plano vertical x-y

Tabla de datos

x (cm)	y(cm)
0.0	0.0
20.0	-6.0
23.5	-9.2
26.0	-11.3
28.5	-13.9
31.0	-16.4
33.5	-19.0
36.0	-22.2
38.5	-25.6
41.0	-29.2
43.5	-33.3
46.0	-36.5
48.5	-41.3

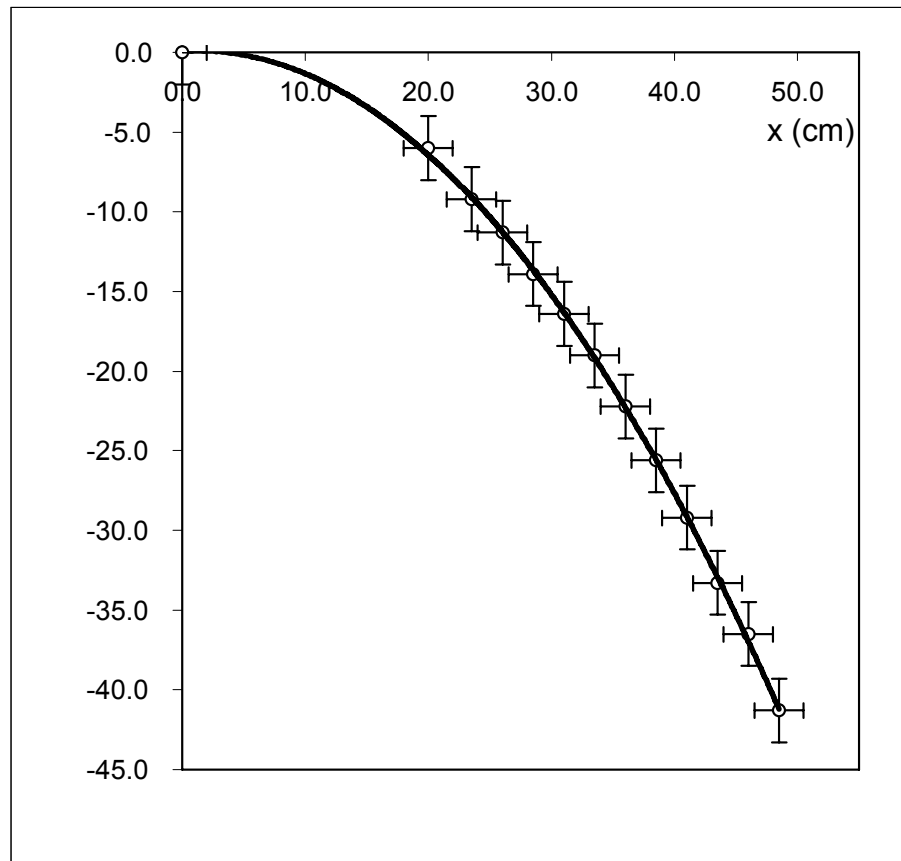


Fig. 15: Gráfico de y vs. x

- Para determinar la relación funcional $y = f(x)$, nos guiamos por el modelo teórico basado en las

relaciones cinemáticas. Como el movimiento se puede analizar considerando en forma independiente sus componentes horizontal y vertical, la expresión para el desplazamiento vertical y es:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2$$

Es decir, esperamos que la trayectoria de la esfera tenga la forma de una parábola y para analizar nuestra data podemos suponer una función empírica del tipo potencial $y = Ax^n$. Tomando logaritmos, tenemos:

$$\log y = \log A + n(\log x)$$

Por lo tanto, la pendiente del gráfico ($\log |y|$) vs ($\log x$) debe arrojar el valor experimental del exponente " n ". Haciendo estas transformaciones, construimos la siguiente gráfica:

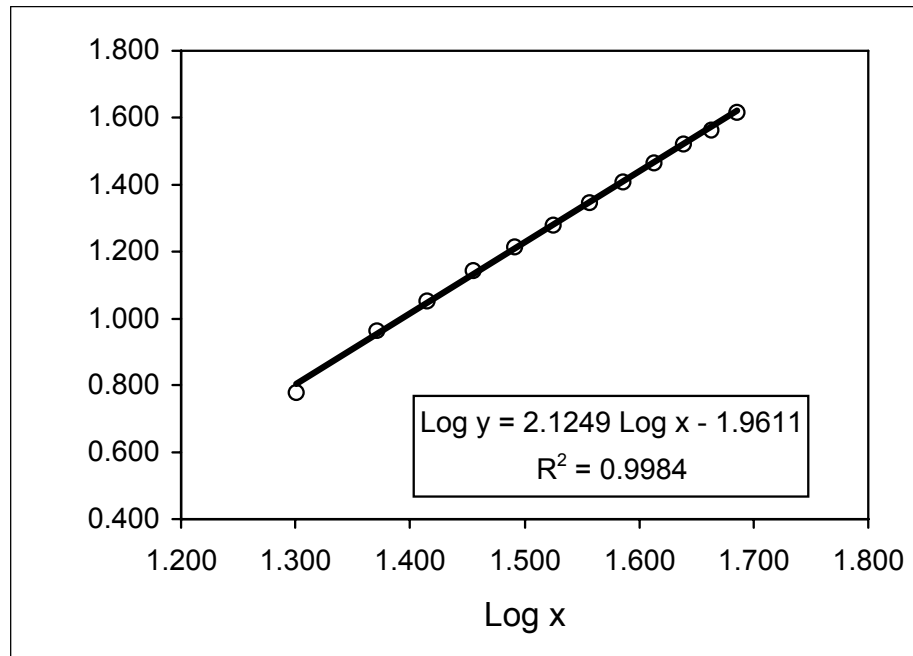


Fig. 16: Gráfico de Log $|y|$ vs. x

Utilizando una hoja de cálculo, hicimos el análisis de la recta por mínimos cuadrados. Obteniendo de la pendiente el valor del exponente $n = (2,12 \pm 0,01)$ Es decir, hemos hallado para el exponente de x una diferencia de apenas un 6% respecto al valor teórico $n = 2$, predicho por las relaciones cinemáticas.

b) Suponiendo el modelo cinemático, la velocidad inicial v_0 de la esfera aparece en el coeficiente de x^2 :

$$y = \left(-\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2$$

Por lo tanto, para linealizar la curva experimental es conveniente hacer la transformación: $x \rightarrow x^2$, luego graficar y en función de x^2 . De esta manera, en la figura siguiente, suponemos que la pendiente de la gráfica equivale a $(g/2v_0^2)$.

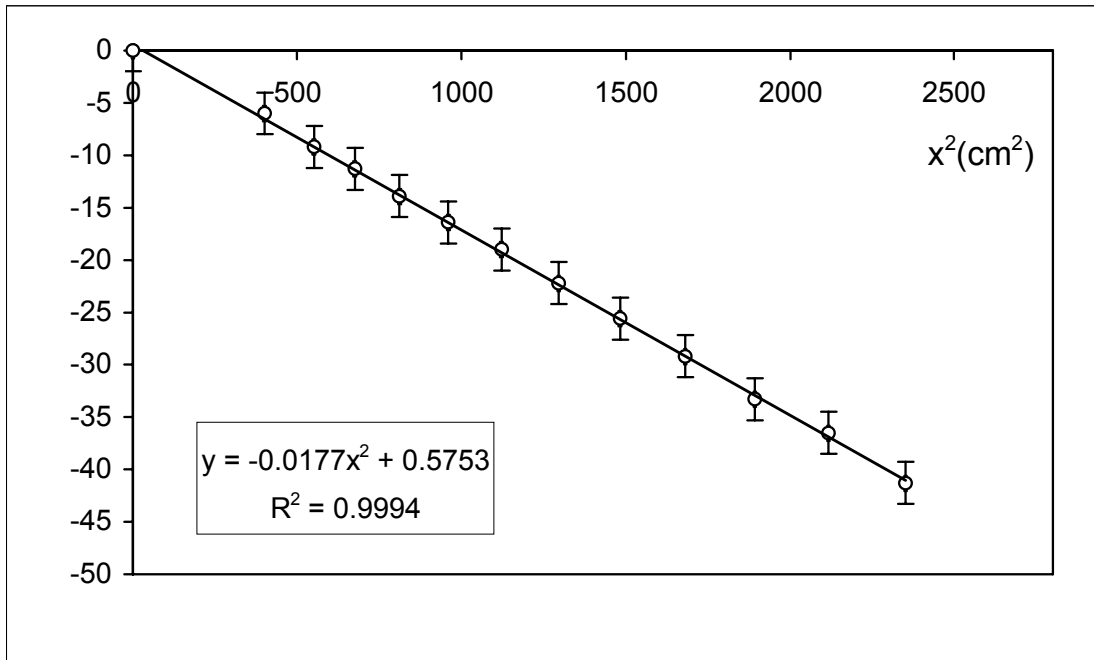


Fig. 17: Gráfico de y en función de x^2 .

El ajuste por mínimos cuadrados de la computadora arrojó $m = (0,018 \pm 0,001) \text{ cm}^{-1}$, para la pendiente. Conocida la aceleración de gravedad $g = (980 \pm 2) \text{ cm/s}^2$, obtuvimos la velocidad inicial de la esfera:

$$\frac{g}{2v_0^2} = 0,018 \text{ cm}^{-1} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g}{2m}} = \sqrt{\frac{980 \text{ cm/s}^2}{2(0,018 \text{ cm}^{-1})}} = 165 \text{ cm/s}$$

Finalmente, haremos un estimado del error relativo de la velocidad v_0 a partir de la propagación de los errores, usamos el método de las derivadas parciales:

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta g}{g} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta m}{m} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2}{980} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{0,001}{0,018} \right| = 0,03$$

Finalmente, podemos reportar el valor de la velocidad con su error correspondiente:

$$v_0 = (165 \pm 5) \text{ cm/s} = (1,65 \pm 0,05) \text{ m/s}$$

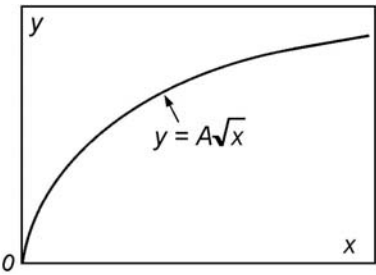
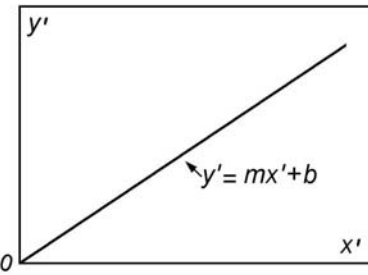
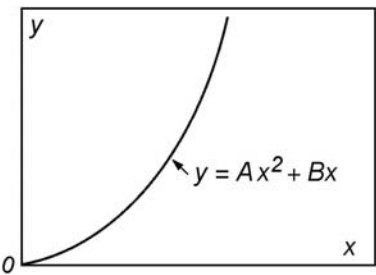
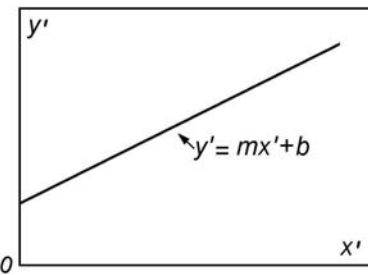
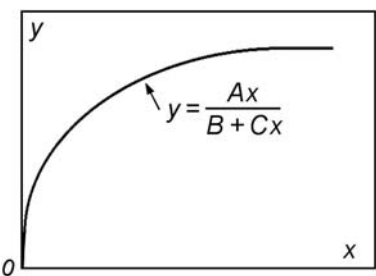
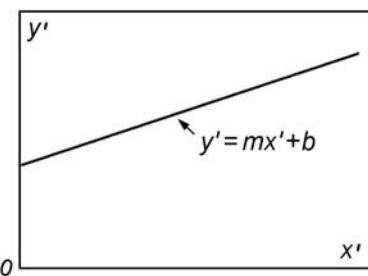
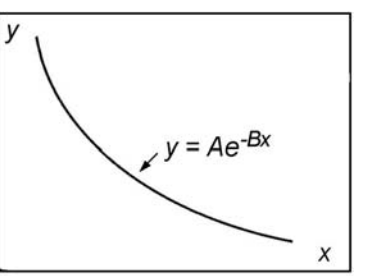
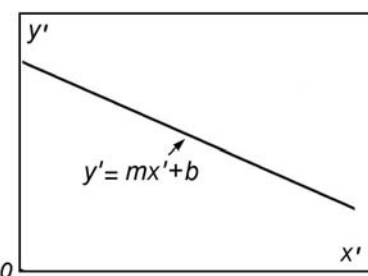
ACTIVIDADES PRELIMINARES

- a) Consulte el manual de su calculadora y estudie el procedimiento para ajustar rectas por el método de los mínimos cuadrados. Le será de utilidad en todos los cursos de laboratorio y en su vida profesional.
- b) Demuestre que es condición de mínimo suficiente el igualar a cero la primera derivada de la suma de los cuadrados de las desviaciones de la variable dependiente con respecto a m y b .
- c) Realice el despeje de los valores m y b indicado en la sección que trata de ajustes por mínimos cuadrados.
- d) Construya (sobre un papel milimetrado) una escala logarítmica de 4 ciclos en la cual la longitud de cada ciclo sea de 4 cm.
- e) Inspeccione las tablas de datos correspondientes a la sesión de práctica y determine los ciclos de los papeles semi-logarítmico y logarítmico que deberá traer al laboratorio. También se requerirá de papel milimetrado.

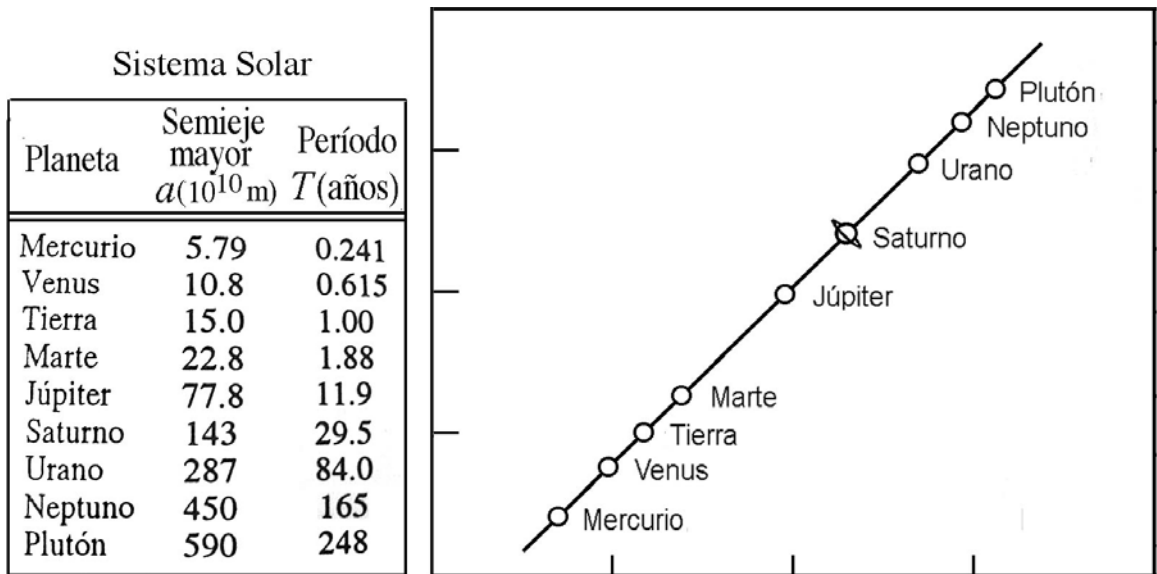
ACTIVIDADES A REALIZAR DURANTE LA SESION DE PRÁCTICA

El profesor hará una breve resumen de los criterios que se utilizan para las representaciones gráficas de una data experimental y los métodos cualitativos para su análisis. Luego hará una demostración en la computadora sobre la elaboración de gráficos mediante el programa Excel. A continuación damos una selección de ejercicios y actividades, algunas de las cuales podrán ser seleccionadas para realizar durante la sesión de práctica.

A1. En la siguiente tabla, la primera columna muestra una función no lineal: $y = f(x)$ para modelar una data experimental. En la segunda columna se indica el gráfico lineal obtenido, $y' = f(x')$, luego de hacer un cambio de variables. Indique en la tercera columna la transformación utilizada así como las expresiones de la pendiente e intersección de la recta, en términos de las constantes.

Función no-lineal $y = f(x)$	Función lineal $y' = f(x')$	Cambio de variable, Pendiente e intersección
		$y' = ?$ $x = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x = ?$ $m = ?$ $b = ?$

A2. Verifiquemos la segunda ley de Kepler. En 1602, Kepler con los datos astronómicos de Tycho Brahe, pudo establecer que el cuadrado del período de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. La siguiente tabla muestra para cada planeta, el semieje mayor de la órbita elíptica, a , y el correspondiente período T . Al lado se muestra una gráfica para ilustrar cómo quedaría representada esta tabla de datos después de las transformaciones apropiadas. Utilizando la tabla nos proponemos verificar esta ley.



- 1) En papel milimetrado, haga la gráfica de a^3 en función de T^2 . Halle la pendiente.
- 2) En papel logarítmico, haga la gráfica de $\log a$ en función de $\log T$. Halle la pendiente.
- 3) Con la relación teórica de la segunda ley de Kepler:

$$a^3 = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)T^2$$

Siendo M la masa del Sol y G la constante de gravitación universal. Compare los resultados obtenidos en los pasos anteriores ¿Se verifica la tercera ley de Kepler?

- 4) Utilizando la computadora, inserte los datos de la tabla en una hoja de cálculo y grafique la distancia a en función del período T . Realice el ajuste de tendencia para una función potencial, obtenga la ecuación empírica y compárela con la relación teórica ¿Se verifica la tercera ley de Kepler?.

A3. Variación lineal de velocidad en función del tiempo

El conductor de un automóvil ve un obstáculo en la vía y aplica los frenos. En la siguiente tabla se da el registro de la velocidad v (m/s) en función del tiempo t (s):

t (s)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
v (m/s)	19	16	14	13	10	7,5	5,0	2,4	1,1

Considere que los errores relativos son de 5% para t y de 10% para v .

- Obtenga por métodos gráficos los parámetros de la recta con sus errores.
- Obtenga los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados.
- Compare los resultados de los apartes previos.

A4. Variación exponencial de la conductividad eléctrica con la temperatura

La conductividad eléctrica σ ($\Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) de un cristal semiconductor de germanio dopado con impurezas, aumenta con la temperatura T (K) de acuerdo a la siguiente tabla

T (K)	250	267	287	310	337	366	405	452	513
σ ($\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$)	0.001	0,003	0,009	0,033	0,092	0,319	0,916	3,251	8,831

Los errores relativos en las mediciones de T son de 5% y de σ son de 10%.

- Haga un gráfico de $(\log \sigma)$ vs $(1/T)$ utilizando papel milimetrado. No incluya las barras de error en esta oportunidad.
- Repita el gráfico utilizando papel semi-logarítmico: ahora sí deberá incluir las barras de error, ajustar la recta por el método de los mínimos cuadrados y trazar la recta de acuerdo a los parámetros del ajuste.
- Determine la ecuación $\sigma(T)$.
- Repita los gráficos y ajustes previos haciendo uso de la computadora.

REFERENCIAS

1. *Data Analysis for Scientists and Engineers*, Stuart L. Meyer (John Wiley & Sons, 1975).
2. *An Introduction to Error Analysis*, John R. Taylor, Univ. Science Books, 1997.
3. Se pueden bajar archivos PDF para imprimir, del tipo papel lineal, semi-log y log-log de cualquier número de ciclos en la siguiente página web:

<http://incompetech.com/graphpaper/logarithmic/>

EL PÉNDULO

OBJETIVOS

- Estudiar la relación entre el período y la longitud de un péndulo simple.
- Aplicar las técnicas de elaboración de gráficas y ajustes.
- Determinación de la aceleración de la gravedad, g .

MATERIALES

1. Cronómetro.
2. Regla.
3. Masa, hilo y soporte para montar un péndulo simple.

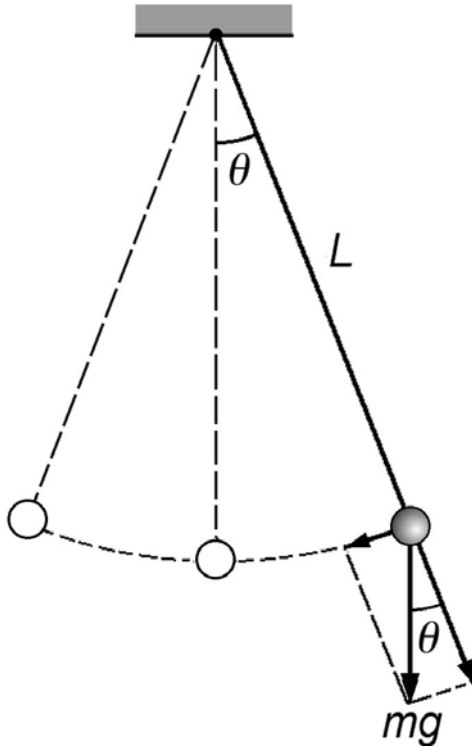
TEORÍA

Un péndulo simple es un sistema idealizado que consiste de una masa puntual suspendida por una cuerda inextensible de masa despreciable. Cuando se aparta la masa hacia un lado de su posición de equilibrio y se suelta, el péndulo comienza a oscilar en un plano vertical por la influencia de la gravedad. El movimiento del péndulo es uno de los ejemplos más sencillos del movimiento armónico simple, el cual tiene una gran importancia conceptual por las múltiples aplicaciones a diversas situaciones físicas. Un péndulo fue utilizado para medir pequeños intervalos de tiempo por Galileo Galilei (1564-1642), y, poco después, colegas suyos lo aplicaron para medir el pulso en seres humanos.

A partir de la segunda ley de Newton, podemos escribir la ecuación que describe el movimiento del péndulo, en términos de la masa, m , la longitud, L la aceleración de gravedad g , y el ángulo, θ , que forma el hilo con la vertical:

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin\theta = 0 \quad (1).$$

Esta ecuación diferencial es un poco complicada de resolver debido al término $\sin(\theta)$. Por tal razón vamos a suponer la aproximación de ángulos pequeños: $\sin\theta \approx \theta$ con la cual la ecuación se simplifica a la siguiente expresión:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0 \quad (2)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden que caracteriza el movimiento armónico simple y cuya solución es:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t) \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3)$$

Donde ω es la velocidad angular del movimiento armónico simple, y se relaciona con las demás variables de este movimiento, el período T y la frecuencia f de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

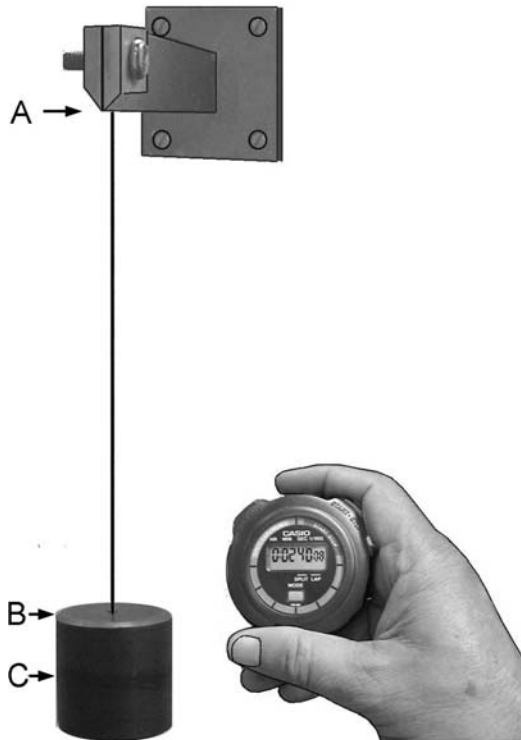
Fig. 1: El péndulo simple

ACTIVIDADES PRELIMINARES

- Repase la teoría del péndulo simple y a partir de las Leyes de Newton deduzca la expresión correspondiente al período del péndulo.
- Calcule aproximadamente el período que se esperaría para las siguientes longitudes del péndulo: 0,25; 1,0 y 2,0 metros.
- ¿Hasta qué valor máximo de θ , debería Ud. colocar inicialmente el hilo del péndulo para que la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ sea válida con un error menor que el 1%?
- Si Ud. puede medir tiempos con un error de $\pm 0,2$ s, y desea un error de 1 % o menos en la determinación del período de un péndulo de 0,5 metros, ¿cuántas oscilaciones deberá contar para obtener la precisión deseada?

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para la realización de esta práctica contamos con un péndulo, una regla y un cronómetro. La experiencia consiste en medir el tiempo que tarda el péndulo para efectuar una oscilación completa, variando el largo del péndulo. El péndulo consta de un soporte que está fijo a la pared donde se ata el hilo que sostiene la masa. Al montarlo asegúrese de que las cuñas que fijan el hilo queden alineadas para que no cambie la longitud efectiva del péndulo.



La masa de este péndulo no es puntual sino que es un cilindro metálico, de modo que la *longitud efectiva* L del péndulo, es la distancia entre el punto A donde se sujeta el hilo hasta el centro de masa C del cilindro. Esta es una consideración importante que deberemos tener en cuenta en el análisis de los datos experimentales. Para analizar correctamente los datos debemos percatarnos de que la longitud efectiva, del péndulo es:

$$L = L_H + L_C \quad (5)$$

donde L_H es la longitud AB del hilo y L_C es la longitud BC entre el centro de masa del cilindro y el punto donde se fija el hilo. La longitud L_H es medida directamente en el experimento, y L_C se determinada con un vernier midiendo la altura h del cilindro y suponiendo que éste es un cuerpo homogéneo.

Fig. 2: Arreglo experimental

A. Determinación de la aceleración de la gravedad a partir de las mediciones del período del péndulo para varias longitudes

- A1.** Seleccionen cinco longitudes del hilo uniformemente repartidas entre la longitud máxima que le puede dar al hilo y un quinto de esa longitud máxima. Para cada longitud midan tres veces el intervalo de tiempo para obtener cincuenta oscilaciones completas del péndulo. Elaboren una tabla como se indica a continuación.

Tabla 1

Longitud del hilo	L_{H1}	L_{H2}	L_{H5}
Medidas de $50T$			
Promedio: $\langle 50T \rangle$			
Error: $\Delta \langle 50T \rangle$			
Período T				
Error: ΔT				

A2. Tomando como referencia la ecuación (4): $T = 2\pi\sqrt{Lg}$, con los datos anteriores hagan el gráfico del cuadrado del período vs. la longitud efectiva del péndulo.

Primero que nada midan la distancia L_C , y elabore en la hoja de cálculo una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 2

Longitud del péndulo: $L_j = L_{Hj} + L_C$	L_1	L_2	L_5
Período al cuadrado: T^2			
Error: $\Delta(L_j)$			
Error: $\Delta(T^2)$				

Hagan un ajuste de mínimos cuadrados a una recta, forzando que la recta pase por cero, e incluya las barras de error para cada punto del gráfico.

A3. A partir de la pendiente resultante del ajuste, determine la gravedad, g , con su respectivo error. ¿Cómo se compara con el valor local de la gravedad (9,777828 m/s²)?

A4. El análisis anterior de los datos para la determinación de g fue relativamente sencillo y directo, y fue posible realizarlo porque existía la posibilidad de determinar la longitud del péndulo sumando las dos distancias que la conformaban.

Si no hubiese sido posible determinar la ubicación del centro de masa del peso del péndulo, también podríamos dar una interpretación de los datos experimentales con un análisis ligeramente más complicado.

Si en la ecuación (4) se reemplaza la longitud efectiva del péndulo de acuerdo a la relación (5) se obtiene:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L_H + L_C}{g} = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L_H + \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L_C \quad (6)$$

Dado que L_C es una constante en todas las mediciones, se tiene que T^2 depende efectivamente de la longitud del hilo L_H . De esta forma, en la gráfica representativa de T^2 vs L_H , la relación funcional entre las variables es de nuevo una recta de *pendiente* $(4\pi^2/g)$, pero que tiene ahora un *intercepto* igual a $(4\pi^2 L_C/g)$.

A5. Construyan una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 3

Longitud del Hilo	L_{H1}	L_{H2}	L_{H5}
Periodo al cuadrado: T^2			
Error: $\Delta(L_H)$			
Error: $\Delta(T^2)$				

Hagan un gráfico de T^2 vs L_H , con barras de error, y un ajuste de mínimos cuadrados a una recta, sin la condición de que pase por cero. Con los parámetros del ajuste obtenidos, determine el valor de la aceleración de gravedad y la distancia L_C del centro de masa, con sus respectivos errores.

Comparen el valor de la aceleración de gravedad con el obtenido en A3 y el valor de L_C con el valor medido con el vernier.

A6. En el primer análisis de datos teníamos un solo parámetro de ajuste e imponíamos la condición física de que cero longitud debía tener cero período. En el segundo análisis de datos tenía dos parámetros de ajuste, la pendiente y el intercepto. Con frecuencia ocurre que, a mayor número de parámetros a ser ajustados, los análisis de datos dan una calidad de ajuste mejor, pero no necesariamente se corresponde con mejores resultados desde el punto de vista físico. Por otro lado, el considerar más de una variable para el ajuste nos permite detectar un error sistemático.

Por ejemplo, si la distribución de masas del objeto que servía de peso en el péndulo no hubiese sido homogénea, nuestra estimación de la ubicación del centro de masa hubiese sido errónea. Este error sistemático se pone de manifiesto en el ajuste con dos parámetros y es enmascarado en el ajuste que obliga la curva a pasar por cero. ¿Cuál de las dos situaciones es la que se aplica, depende del caso en consideración?

Para ilustrar esta situación ensayemos ahora un ajuste con una curva de potencia, es decir, del tipo: $T = c L^n$, donde la constante c y el exponente n son ahora los dos parámetros a ajustar. Para esto proceda como se indica a continuación:

A7. Construyan una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 4

Longitud del péndulo $L_i = L_{Hi} + L_C$	L_1	L_2	L_5
Período: T			
Error : $\Delta(L_i)$			
Error: $\Delta(T)$				

Hagan un gráfico de T vs L , con barras de error y un ajuste de mínimos cuadrados a una curva potencial.

Comparen el valor del exponente con el de la relación del período en función de la longitud del péndulo (Ec. 4)

Determinen de la constante c del ajuste, el valor de la aceleración de gravedad.

A8. Por último, construyan una tabla con los valores de $\text{Log}L$ y $\text{Log}T$ como se indica a continuación:

Tabla 5

Longitud del péndulo:	L_1	L_2	L_5
$\text{Log}L (m)$			
$\text{Log}T(s)$			

Aplicando el ajuste de mínimos cuadrados con regresión lineal, comparen los parámetros obtenidos con los términos que se obtienen al aplicar logaritmos en la ecuación 4 y del término independiente calculen el valor de la aceleración de gravedad

A9. Como conclusión de este trabajo, construyan una tabla comparativa con los diferentes valores obtenidos para la aceleración de gravedad y discutan las bondades y limitaciones de cada uno de ellos.

REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Cap. 6, Ed. Continental (1995).
2. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo2/pendulo2.htm>
3. <http://www.walter-fendt.de/ph11e/pendulum.htm>

LEY DE HOOKE Y OSCILADOR MASA-RESORTE

"... *Ut tensio, sic vis...*"
(tal como la extensión así es la fuerza)
Robert Hooke, 1676

OBJETIVOS

- Verificar la ley de Hooke y determinar la constante elástica de un resorte.
- Usar el resorte para determinar la masa de un objeto mediante los métodos *estático* (se usa el resorte como dinamómetro) y *dinámico* (el resorte con el objeto oscila armónicamente).

MATERIALES

1. Resorte helicoidal (máxima carga 1 kg).
2. Porta-pesas y juego de pesas ($\Delta M = \pm 0,5$ g).
3. Regla.
4. Cronómetro.
5. Objeto de masa desconocida.
6. Base, nuez y barras de soporte.

TEORÍA

Bajo la acción de una fuerza externa, un cuerpo puede sufrir estiramiento, compresión, torsión, doblamiento y, en general, una deformación elástica. Algunos objetos elásticos como un resorte helicoidal dentro de ciertos límites pueden, estirarse o comprimirse en una cantidad ΔL que resulte proporcional a la fuerza deformante F .

$$F = -k \Delta L \quad (1)$$

En tal caso se dice que el resorte obedece a la ley de Hooke. La constante de proporcionalidad, k , recibe el nombre de *constante elástica* del resorte.

El *dinamómetro* es un instrumento muy simple basado en la ley de Hooke: la deformación de un resorte de constante elástica conocida permite medir el valor de la fuerza aplicada (Fig 1).

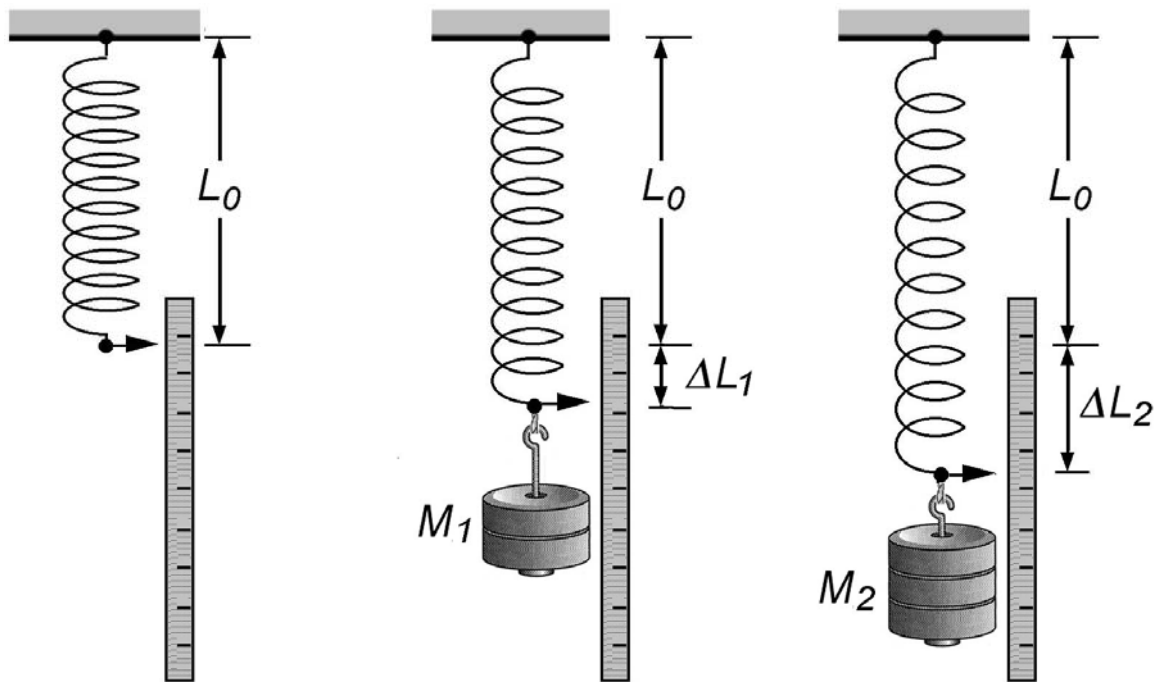


Fig. 1: El resorte utilizado como dinamómetro

Con el resorte y un objeto atado a él también podemos tener un *oscilador armónico*, (Fig 2). Si se suspende un objeto de masa m , el resorte sufre un estiramiento ΔL , en equilibrio, se cumple:

$$k \Delta L = Mg \quad (2)$$

Suponga ahora que el objeto se desplaza en una distancia x por encima de su posición de equilibrio.

El estiramiento del resorte será ahora $(\Delta L - x)$. La fuerza hacia arriba ejercida por el resorte es de magnitud $k(\Delta L - x)$, y si tomamos en cuenta que $k \Delta L = Mg$, la fuerza neta sobre el objeto es:

$$F = k(\Delta L - x) - Mg = -kx \quad (3)$$

Se observa que la fuerza de restitución es siempre proporcional al desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio.

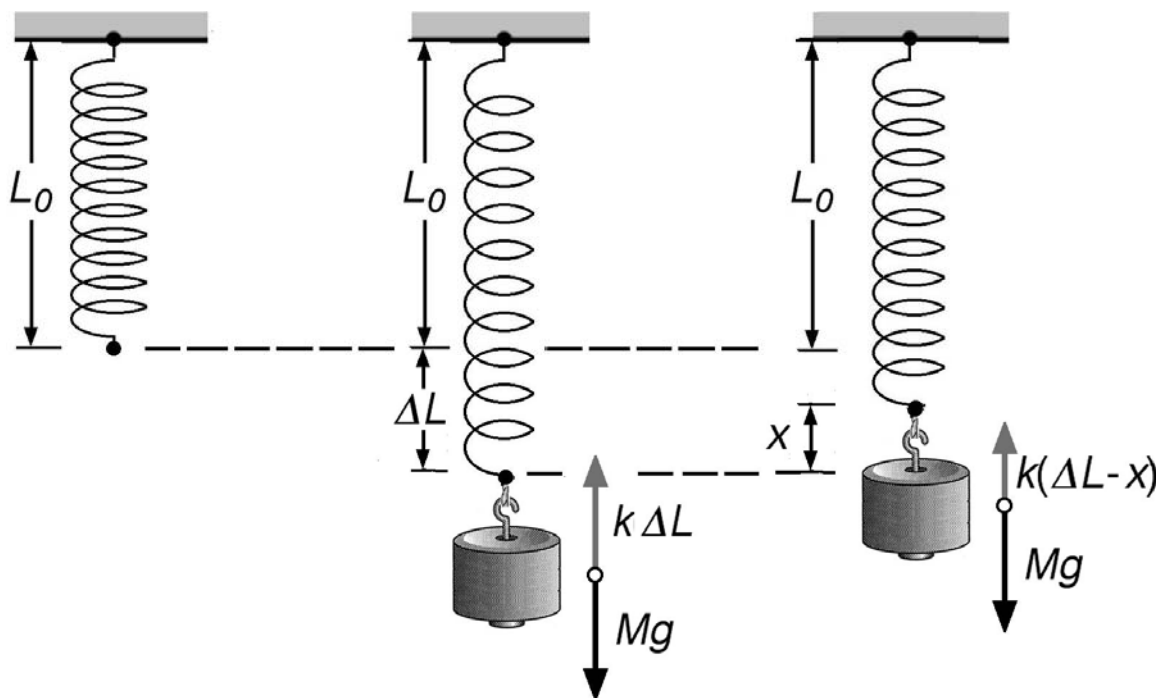


Fig. 2: El oscilador masa- resorte

Por lo tanto, si la masa está en movimiento, éste será del tipo armónico simple, cuyo período sabemos que depende de la masa m y de la constante k , de acuerdo a la relación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad (4)$$

En esta expresión se considera que la masa del resorte es despreciable en relación a la del cuerpo suspendido.

Si la masa del resorte no es despreciable, el período viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m_{eq}}{k}} \quad (5)$$

siendo m_{eq} la masa equivalente del resorte. Usando un modelo sencillo se puede demostrar (véase el apéndice A-3), que la masa equivalente del resorte es igual a un tercio de la masa total del resorte ($m_{eq} = m_{res} / 3$).

ACTIVIDADES PRELIMINARES

Resuelva los siguientes problemas:

1. ¿Si se corta un resorte en dos partes? Un objeto suspendido de un resorte realiza oscilaciones de período T_0 . A continuación se corta el resorte por la mitad y las dos mitades se utilizan en paralelo para sostener el mismo objeto (Fig. 3). ¿Cuál será el nuevo período de oscilación?

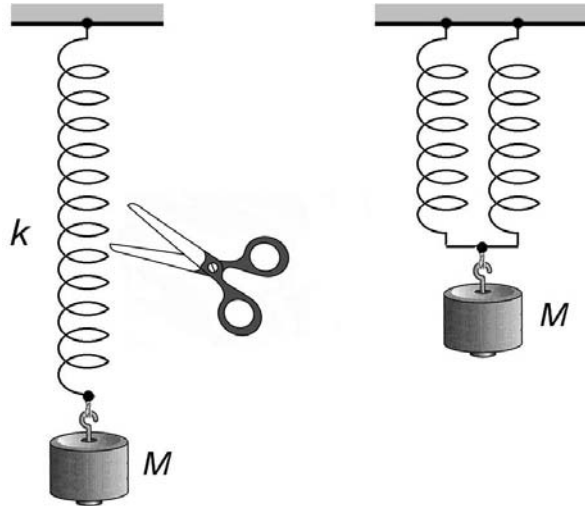


Fig. 3: cortando un resorte de dos pedazos

2. ¿Cuánto marcará el dinamómetro? Sea una pesa de masa M que está suspendida en reposo de un dinamómetro, la lectura de éste es obviamente Mg (newtons). Si levantamos la pesa hasta que el dinamómetro indique cero, y la soltamos:

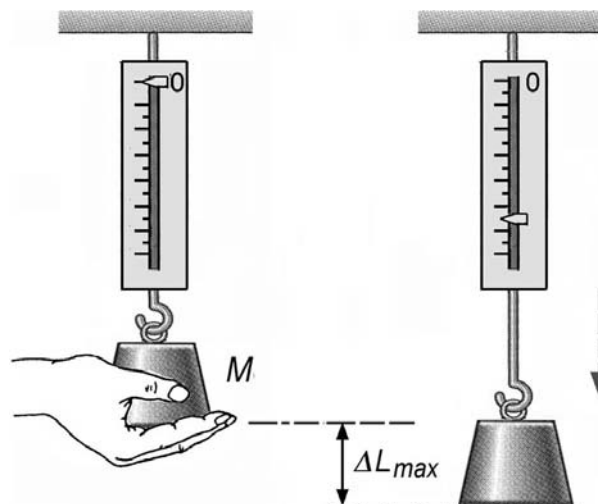


Fig. 5: Lectura del dinamómetro al soltar la pesa

¿Cuál será la máxima lectura instantánea (en Newtons) del dinamómetro?

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se dispone de una base con una barra vertical y una nuez que sirve de soporte a una varilla, de la cual puede suspenderse el resorte. Un porta-pesas colgado en el extremo inferior del resorte servirá para disponer las diferentes pesas y mediante una regla vertical podemos medir los alargamientos correspondientes del resorte (ver figura 6).

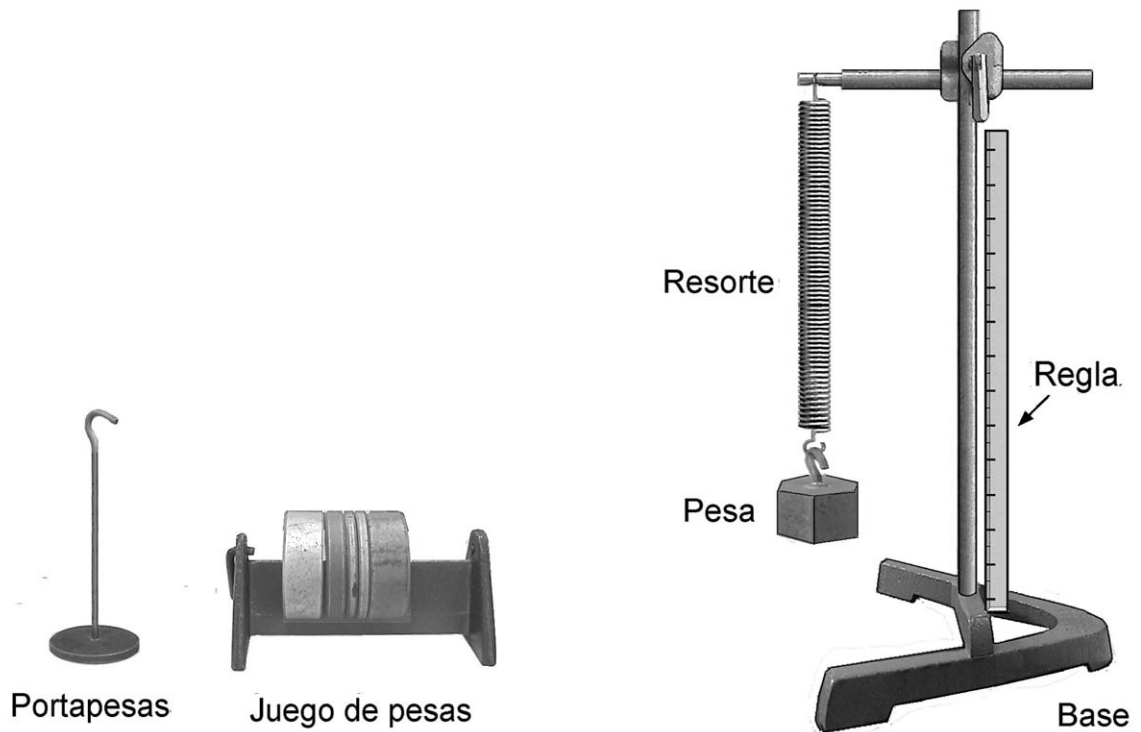


Fig. 6: Soporte con base para suspender el resorte y la pesa

A. Determinación de la constante elástica (método estático)

- A1.** Coloque la regla en posición vertical y paralela al resorte y seleccione alguna marca de referencia (por ejemplo el extremo inferior del portapesas) como posición inicial para medir los estiramientos, de modo que en lo posible sea minimizado el error de paralaje.
- A2.** Tome nota de la posición inicial y vaya colocando en el portapesas sucesivas masas (200 g, 250 g, 300 g, 350 g,...600 g) y una vez alcanzado el equilibrio anote el estiramiento x experimentado por el resorte. Construya una tabla:

Tabla 1

M (kg)	x (m)
.....
.....
.....

- A3.** Con el computador haga la representación gráfica de la masa M en función de la posición x . ¿*Resulta la gráfica una línea recta?* Seleccione el rango donde el resorte se comporta en el régimen lineal y haga el ajuste de la curva para determinar la constante elástica k .
- A4.** Use el resorte como *dinamómetro*. Para ello suspenda el objeto problema y observe la elongación y con ella determine su masa (en kg) y su peso (en newtons) con ayuda del gráfico de $x = f(M)$.

B. Oscilaciones armónicas

- B1.** Suspenda del resorte una masa de 200 g y, con cuidado estírelo un poco, suéltelo y déjelo oscilar verticalmente. Mida el tiempo que tarda en realizar 50 oscilaciones. Determine el período y su correspondiente error.
- B2.** Repita el procedimiento anterior para diferentes masas (250 g, 300 g,....600 g). Registre las medidas tomadas en una tabla con su error correspondiente:

Tabla 2

M (kg)	$50T$ (s)	T (s)	T^2 (s ²)
.....
.....
.....

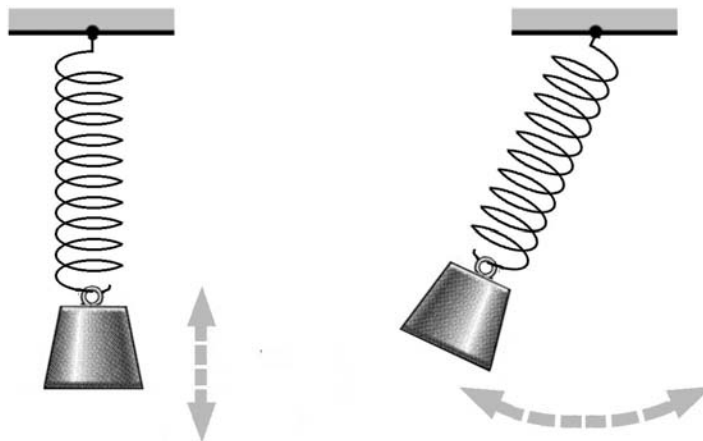
- B3.** De acuerdo a la relación (5), T^2 debería ser una función lineal de la masa suspendida:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)M + \frac{4\pi^2}{k}m_{eq} \tag{6}$$

- B4.** En el computador haga la representación gráfica de T^2 vs M . ¿Resulta la gráfica una línea recta?
- B5.** Haga el ajuste de la curva para determinar la constante elástica del resorte, k de la pendiente de la recta; y la masa equivalente del resorte, m_{eq} de la intersección con el eje de T^2 .
- B6.** Compare los valores obtenidos en la constante k por este procedimiento (dinámico) y con el procedimiento anterior (estático).
- B7.** Suspenda del resorte el objeto problema y determine su período de oscilación. Use este resultado para calcular su masa (en kg) y su peso (en Newtons). Compárelos con los valores obtenidos mediante el método estático.

PREGUNTAS

1. En el método estático lo que se determina es la *masa gravitacional* del objeto problema, mientras que en el método dinámico se determina su *masa inercial*.
 - a) ¿Tienen estas cantidades el mismo significado físico? Explique.
 - b) ¿Tienen las masas gravitacional e inercial el mismo valor numérico?
2. Pudiste haber observado que para ciertos valores de la masa suspendida del resorte, y transcurrido un cierto tiempo de estar oscilando verticalmente, esta oscilación tiende a disminuir y el sistema va adquiriendo además, un movimiento pendular. Luego este movimiento pendular va decayendo y vuelve a establecerse el movimiento vertical. El proceso de intercambio entre estos dos modos de oscilación se repite periódicamente.



Encuentre una explicación a este extraño comportamiento. ¿Por qué esto se observa únicamente para cierto rango de valores de las masas suspendidas?

REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Ed. Continental (1995).
2. R. A. Serway, *Física*, tomo. 1, tercera edición, Mc. Graw-Hill (1992).
3. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/oscilacion.htm>
4. <http://chair.pa.msu.edu/applets/newosc/a.htm>
5. http://ww2.unime.it/dipart/i_fismed/wbt/mirror/ExplrSci/dswmedia/harmonic.htm
6. <http://www.walter-fendt.de/ph11e/springpendulum.htm>

FRICCIÓN ENTRE SÓLIDOS

OBJETIVO

Estudiar el coeficiente de fricción estática para objetos de diferentes materiales y entre cuerpos del mismo material pero con diferentes pesos y áreas de contacto.

MATERIALES

1. Rampa de inclinación variable
2. Transportador y plomada
3. Bloques de teflón y de goma.
4. Cintas de teflón y de goma.
5. Canal de teflón.
6. Plataforma giratoria
7. Cronómetro

TEORÍA

Cuando dos objetos sólidos están en contacto, la fuerza entre ellos puede ser descompuesta en dos componentes: una componente que es perpendicular a la superficie de contacto (fuerza normal \vec{N}) y la otra componente que es paralela a dicha superficie. Esta última se denomina *fuerza de rozamiento o de fricción*.

Si se aplica una fuerza horizontal débil, \vec{F}_a , a un objeto que reposa sobre una superficie es probable que éste no se mueva, a causa de la fuerza de *fricción estática* \vec{F}_e que se opone a la fuerza aplicada y la equilibra.

Si se aumenta gradualmente la fuerza aplicada y el objeto aún no se mueve es porque la fuerza de roce estático también se ha incrementado. Sin embargo, existe un valor

máximo de la fuerza de *fricción estática* para el cual se rompe el equilibrio y el objeto comienza a moverse con relación al otro. Una vez que el objeto comienza a moverse, la fuerza de fricción tiene un valor generalmente menor y se opone al movimiento. Esta es llamada fuerza de *fricción cinética*. (Figuras 1a y 1b)

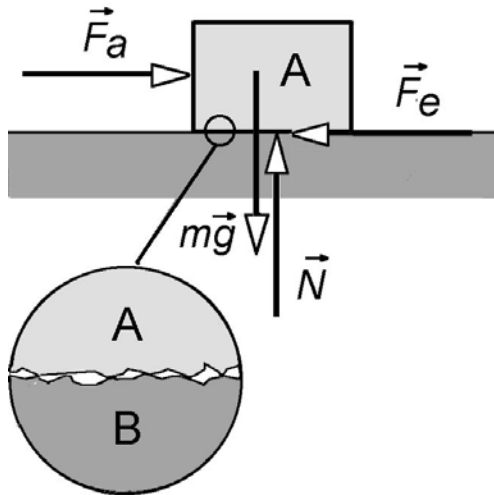


Fig. 1a: Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un bloque.

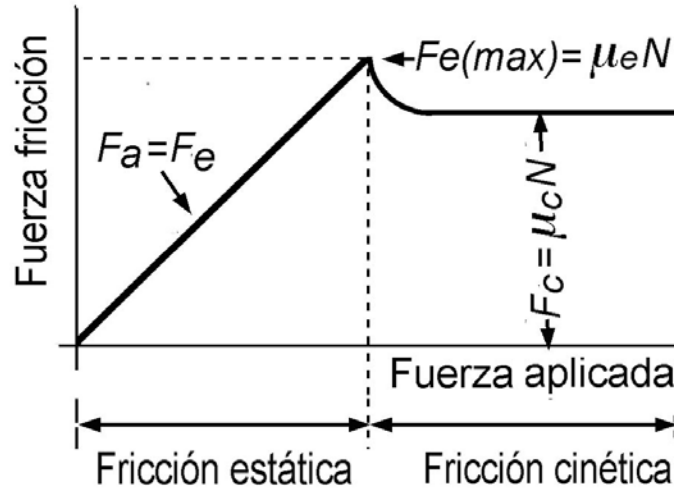


Fig. 1b: Fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada.

Las observaciones experimentales muestran que, en una amplia gama de condiciones, las fuerzas de fricción resultan proporcionales a la fuerza normal que presiona los dos objetos.

$$F_e \leq \mu_e N$$

La igualdad corresponde cuando el cuerpo está a punto de deslizar:

$$F_e(\text{máx}) = \mu_e N$$

La constante de proporcionalidad se denomina *coeficiente de fricción estática* (μ_e) y depende de la naturaleza de cada par de superficies.

En este experimento vamos a determinar el coeficiente de fricción estática para dos materiales que tienen aplicaciones prácticas muy importantes: la goma y el teflón. A tal efecto usaremos dos procedimientos diferentes:

- A) *Un cuerpo que resbala sobre un plano inclinado.*
- B) *Un cuerpo que resbala sobre una plataforma rotatoria.*

ACTIVIDADES PRELIMINARES

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Bloque sobre plano inclinado: Un bloque está inicialmente en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.

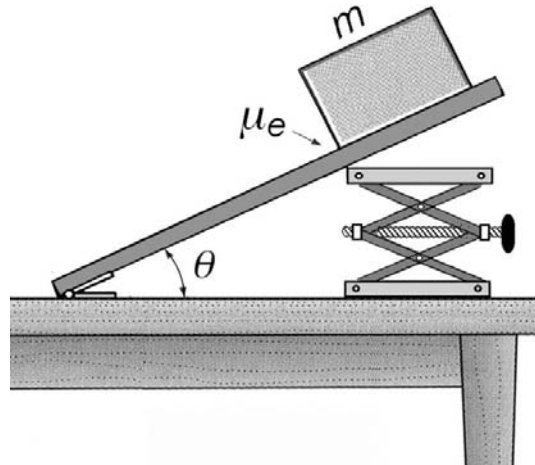


Fig. 2: Bloque sobre plano inclinado

Demuestren que el cuerpo comenzará a deslizar cuando el ángulo de inclinación θ se eleva a un valor crítico θ_c , el cual está relacionado con el coeficiente de fricción estática μ_e mediante la expresión:

$$\mu_e = \tan \theta_c \quad (1)$$

2. Bloque sobre plataforma giratoria: Un bloque está colocado sobre una plataforma horizontal que gira a velocidad angular constante, ω . Se observa que el bloque resbala cuando se coloca a una distancia r del centro de rotación mayor que un valor crítico, r_c .

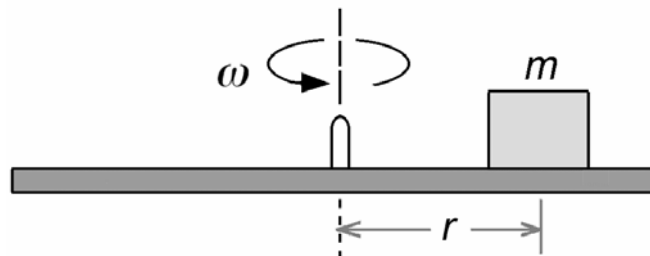


Fig. 3: Bloque sobre plataforma giratoria

Demuestren que el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la plataforma viene dado por la expresión:

$$\mu_e = \omega^2 r_c / g \quad (2)$$

Siendo g la aceleración de la gravedad.

3. Bloque sobre una canal en ángulo recto: Determinen cómo se modifican las dos expresiones anteriores si un bloque cúbico puede deslizar sobre una canal en ángulo recto, como se ilustra en la figura.

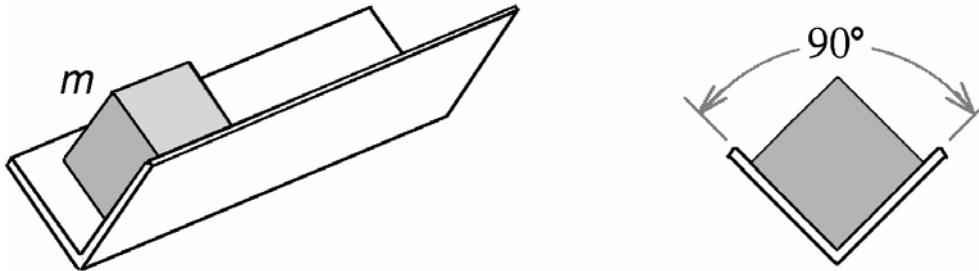


Fig. 4: Bloque sobre una canal en ángulo recto

PROCEDIMIENTOS EXPERIMENTALES

¡ADVERTENCIA!

El coeficiente de fricción depende fuertemente de las condiciones de la superficie: Si la superficie es lisa o rugosa o si contiene residuos u otros contaminantes. Para obtener resultados confiables, las superficies deben estar libres de grasa. Eviten tocar las superficies con los dedos ya que su grasa puede alterar los resultados. Al iniciar la experiencia limpien con alcohol las superficies y los objetos de la Figura 6. No toquen las superficies que van a estar en contacto.

A. Determinación del coeficiente de fricción estática, μ_e , mediante un plano inclinado.

En esta primera parte de la práctica Ud. dispone de un aparato que consta de un plano de plexiglás (Figura 5), sobre el cual se disponen tres superficies diferentes para ser estudiadas: una cinta de goma, una lámina de teflón y un canal de teflón. Este plano puede girar alrededor de un eje horizontal, cuyo *ángulo ϕ con la vertical* se determina con la ayuda de un transportador y una plomada que lleva dispuesto en uno de sus lados.

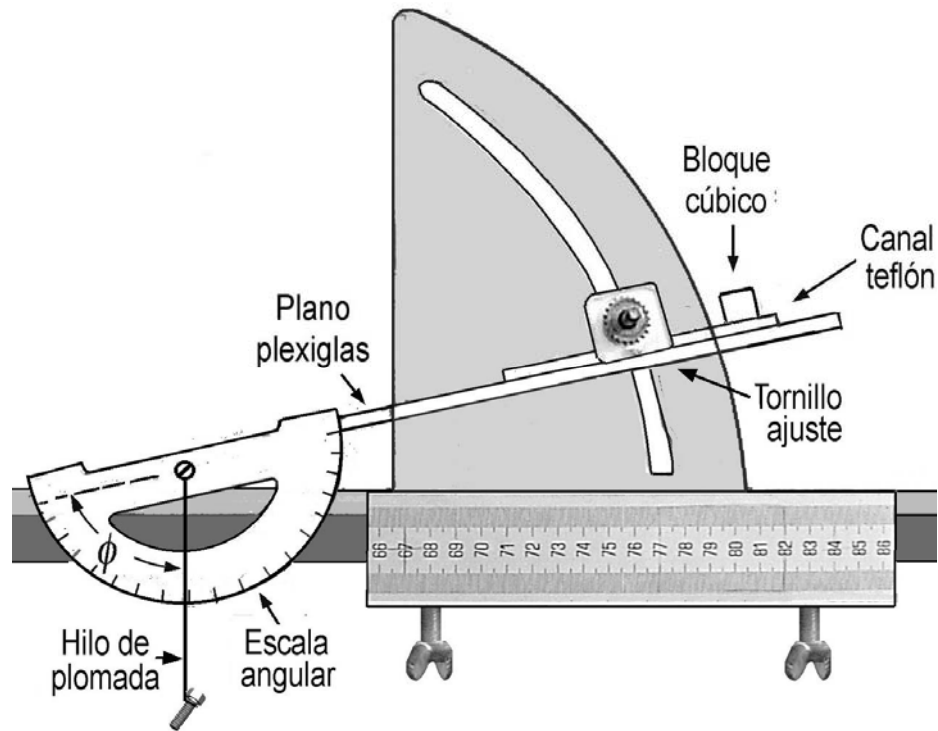


Fig. 5: Montaje experimental del plano inclinado

Asimismo, dispone de los cuerpos mostrados en la figura 6, que se utilizarán para determinar el coeficiente de fricción correspondiente.

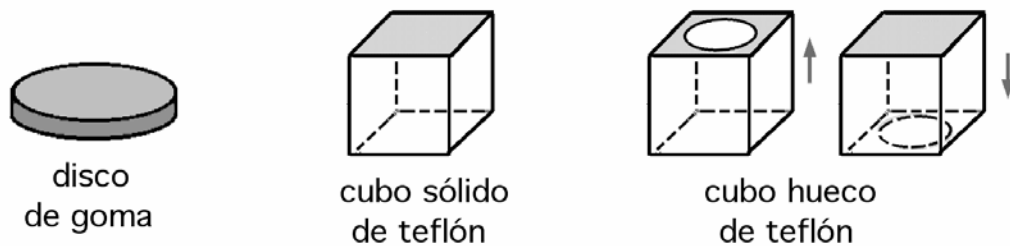


Fig. 6: Cuerpos para determinar el correspondiente μ_e

1. Fricción de goma sobre goma

A1. Tomando el disco por su parte periférica colóquenlo sobre la cinta de goma, tratando de no tocar con los dedos la superficie estudiada. Verifiquen la posición horizontal del plano de plexiglás para la mejor determinación del ángulo del plano inclinado.

- A2.** Aumenten suavemente la inclinación del plano de plexiglás, evitando movimientos bruscos. Continúen aumentando la inclinación hasta llegar al *ángulo crítico con la horizontal*, θ_c , en el cual el disco comienza a deslizar. Observen cuidadosamente la figura 2, para estar seguro sobre cuál es el ángulo que se lee en el transportador y su relación con el ángulo crítico θ_c . Hagan un dibujo del transportador que refleje esta observación en su caso particular.
- A3.** Repitan el procedimiento anterior por lo menos 10 veces, coloquen el disco siempre por la misma cara tratando de no tocar con los dedos la superficie estudiada. Anoten en la *tabla 1* los valores del ángulo crítico θ_c observados.
- A4.** Determinen el valor medio del ángulo de inclinación crítico θ_c , y con este valor determinen el coeficiente de fricción estática μ_e , para las superficies goma-goma, con su correspondiente error $\Delta\mu_e$. Anote estos valores en la *Tabla 1*, tomando en cuenta las correspondientes cifras significativas.

II. Fricción de teflón sobre teflón

- A5.** Coloquen ahora el cubo sólido de teflón sobre la lámina de teflón y, siguiendo los pasos anteriores, procedan a determinar el coeficiente de fricción estática del teflón-teflón, con su correspondiente error $\Delta\mu_e$. Anoten los valores en la *Tabla 1*, tomando en cuenta las correspondientes cifras significativas.
- A6.** Repitan paso a paso la experiencia anterior colocando el cubo sólido de teflón sobre la canal y determinen el coeficiente de fricción, con su correspondiente error, $\Delta\mu_e$. Anoten los valores en la *Tabla 1*, tomando en cuenta las correspondientes cifras significativas.
- A7.** Coloquen el cubo hueco de teflón con su cara hueca sobre la lámina de teflón y, repitan el procedimiento anterior para determinar el coeficiente de fricción estática con su respectivo error $\Delta\mu_e$. Anoten los valores en la *Tabla 1*, tomando en cuenta las correspondientes cifras significativas.
- A8.** Coloquen el cubo hueco de teflón con la cara de mayor área (opuesta al agujero) sobre la lámina de teflón y, usando el mismo procedimiento, determinen el coeficiente de fricción estática con su error $\Delta\mu_e$. Anoten los valores en la *Tabla 1*, tomando en cuenta las correspondientes cifras significativas.

Tabla I

Material		θ_{c1}	θ_{c2}	θ_{c3}	θ_{c10}	$\langle \theta_c \rangle$	$\Delta \theta_c$	$\langle \mu_e \rangle$	$\Delta \mu_e$
Goma-Goma										
Teflón sólido	Lámina									
	Canal									
Teflón hueco	hueco									
	sólido									

A9. Comparen los valores obtenidos para los diferentes coeficientes de fricción en los diferentes casos:

- a) Goma - goma y teflón-teflón
- b) Teflón-teflón: para diferentes áreas de contacto
- c) Teflón-teflón: para diferentes pesos

B. Determinación del coeficiente de fricción estática usando una plataforma giratoria.

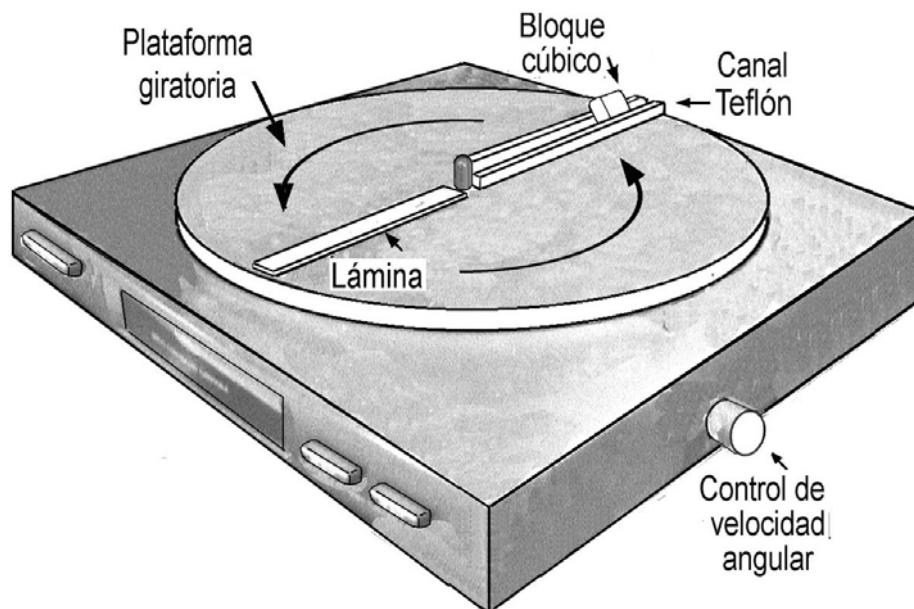


Fig. 7: Montaje experimental de la plataforma giratoria

I. Cubo sólido de teflón sobre lámina de teflón

- B1.** Coloquen el cubo sólido de teflón sobre la superficie de teflón en cierta posición radial cercana al borde del disco (r máximo). Una vez activada la plataforma giratoria, vayan aumentando gradual y muy lentamente la velocidad de rotación hasta que el disco empiece a resbalar.
- B2.** Utilicen el cronómetro para medir el tiempo que tarda el plato giratorio en completar 10 vueltas y de allí determine el período T y la correspondiente velocidad angular de rotación, ω .
- B3.** Repitan el procedimiento anterior colocando el cubo sólido en una posición radial igual, tratando siempre de no tocar con los dedos la superficie de teflón estudiada y de colocar siempre el cubo de teflón de la misma manera sobre dicha superficie. Anoten en la *tabla 2a* los correspondientes valores hasta completar 10 medidas para ese valor radial.
- B4.** Repitan las medidas anteriores para posiciones radiales menores hasta completar un total de cinco valores de radios diferentes.

Tabla 2a

Radio	t_1	t_2	t_3	t_{10}	$\langle t \rangle$	Δt	T	ΔT	ω	$\Delta \omega$
r_1										
r_2										
r_3										
r_4										
r_5										

- B5.** A partir de los valores de r y ω obtenidos construyan la *tabla 2 b*.

Tabla 2 b

r (cm)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
ω (s ⁻¹)					
1/r (m)					
ω^2 (s ⁻²)					

B6. En el computador hagan la representación gráfica correspondiente a esta tabla de:
 ω^2 en función de $1/r$

¿Resulta la gráfica una línea recta?

¿Pasa esta línea por el origen de coordenadas (0, 0)?

B7. Hagan el ajuste de la curva *sin imponer la condición de que debe pasar por el punto (0,0)* y determinen, a partir de la pendiente, el coeficiente de fricción estática μ_e del teflón - teflón.

Recuerden que la expresión $\omega^2 = (\mu_e g)(1/r)$ debe ser válida aún para el punto límite ($\omega^2 = 0, 1/r = 0$). En física se observan desviaciones de la teoría usualmente cuando no se cumplen las suposiciones bajo las cuales se ha deducido una expresión. En este experimento, el hecho de que la recta no pase por el punto (0, 0) puede ser atribuido a que en la teoría se ha considerado al objeto como si fuese una partícula localizada en su centro geométrico. Sin embargo, nuestro objeto en estudio tiene dimensiones apreciables y obviamente el centro de fuerzas no coincide con su centro geométrico.

II. Cubo de teflón sobre canal

B8. Repitan el procedimiento anterior colocando el cubo sólido de teflón sobre la canal y determinen el correspondiente coeficiente de fricción estática para este caso.

Tabla 3 a

Radio	t_1	t_2	t_3	t_{10}	$\langle t \rangle$	Δt	T	ΔT	ω	$\Delta \omega$
r_1										
r_2										
r_3										
r_4										
r_5										

B9. A partir de los valores de r y ω obtenidos construya la *tabla 3 b*.

Tabla 3 b

r (cm)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
ω (s ⁻¹)					
1/r (m)					
ω^2 (s ⁻²)					

B10. En el computador hagan la representación gráfica correspondiente a esta tabla de:

$$\omega^2 \text{ en función de } 1/r$$

B11. Hagan el ajuste de la curva *sin imponer la condición de que debe pasar por el punto (0,0)* y determinen, a partir de la pendiente, el coeficiente de fricción estática μ_e del teflón - teflón.

B12. Comparen los valores obtenidos para μ_e del teflón-teflón mediante los dos procedimientos diferentes: el plano inclinado y la plataforma giratoria. ¿Qué pueden concluir respecto a estos resultados?

PREGUNTAS

1. A menudo se considera la fricción como un mal indeseable y se toman las medidas para reducirla por medio de lubricación, etc... Citen tres ejemplos donde la fricción resulta un bien necesario.
2. Cuando un cuerpo se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal con fricción, ¿por qué es *más difícil* hacer que comience a moverse que mantenerlo después en movimiento uniforme?
3. ¿Podría ser el coeficiente de fricción mayor que la unidad? Cualquiera sea su respuesta explique por qué sí, o por qué no?
4. En un automóvil, la fricción del neumático con el pavimento es una cuestión muy compleja donde entran distintos factores: Depende del material del neumático, del tipo

de suelo, de si el suelo está seco o mojado, del grado de inflado, del dibujo de la banda de rodadura, del ancho de los canales para que pueda evacuar el agua, etc... Suponga que los cauchos normales que trae el automóvil de agencia son reemplazados por otros idénticos pero extra-anchos. Será la fuerza de fricción mayor suponiendo las mismas condiciones de las superficies? Explique.

5. Suponga que un camión de cuatro ruedas se adapta para colocarle 12 ruedas idénticas a las anteriores. ¿Esperaría Ud. que la fuerza de fricción con el pavimento sea diferente? Explique.

REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Cap. 6, Ed. Continental (1995).
2. R. A. Serway, *Física*, tomo 1, tercera edición, Cap. 5, Mc. Graw-Hill (1992).
3. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/rozamiento/general/rozamiento.htm>

MOVIMIENTO ACELERADO EN UNA DIMENSIÓN

OBJETIVOS

- Para un movimiento uniformemente acelerado en una dimensión, estudiar la dependencia de la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo y la dependencia de la velocidad en función de la distancia.

MATERIALES

1. Carril de aire con compresor.
2. Dos (2) carritos deslizadores para el carril de aire, uno corto y otro largo.
3. Unidad electrónica para la medición de tiempos.
4. Dos (2) fotosensores
5. Cuña para producir una inclinación determinada del carril de aire.

TEORÍA

El movimiento de una partícula está determinado por sus condiciones iniciales en posición y velocidad y las ecuaciones diferenciales de movimiento. Para el caso de una partícula que se desplaza en una dimensión con aceleración constante, éstas ecuaciones son:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \text{constante} \quad (2)$$

Para determinar el tipo movimiento debemos encontrar ecuaciones algebraicas que nos permitan calcular para un instante dado las variables del movimiento, posición, x , y velocidad, v , a partir de las magnitudes posición inicial, x_0 , velocidad inicial, v_0 , y aceleración, a .

Integrando respecto al tiempo la segunda ecuación diferencial, obtenemos:

$$v = v_0 + at \quad (3)$$

que es una ecuación algebraica mediante la cual se puede calcular la velocidad en función del tiempo. Si ahora sustituimos esta velocidad en la primera ecuación diferencial, e integramos respecto al tiempo, obtenemos:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

que es de nuevo una ecuación algebraica, pero ahora entre la distancia x y el tiempo t . Para resolver en forma directa cualquier problema de movimiento solamente nos faltaría una ecuación que relacionara la velocidad con la distancia. Esta puede ser derivada directamente despejando el tiempo de la ecuación 3 y reemplazándola en la ecuación 4, con lo cual obtenemos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (5)$$

Conocidas las condiciones iniciales, estas tres ecuaciones algebraicas nos permiten encontrar el valor de las demás variables de movimiento fijando cualesquiera de ellas.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para la realización de esta práctica contamos con una pista o carril de aire, con su unidad compresora y dos piezas deslizadoras que sirven como móviles, que llamaremos *carritos*. El carril de aire consiste de un tubo hueco de perfil de aluminio con una regla de medición y está provisto de una serie de orificios uniformemente repartidos por los que fluye aire suministrado desde una unidad compresora, con el objeto de minimizar la fricción (Fig. 1).

ADVERTENCIA

Este es un equipo muy delicado que debe manejarse con sumo cuidado. No lo raye, no le pegue cintas adhesivas ni escriba sobre él. Antes de empezar la práctica, si hay un carrito sobre el carril, retírelo levantándolo, no lo deslice sobre la superficie.

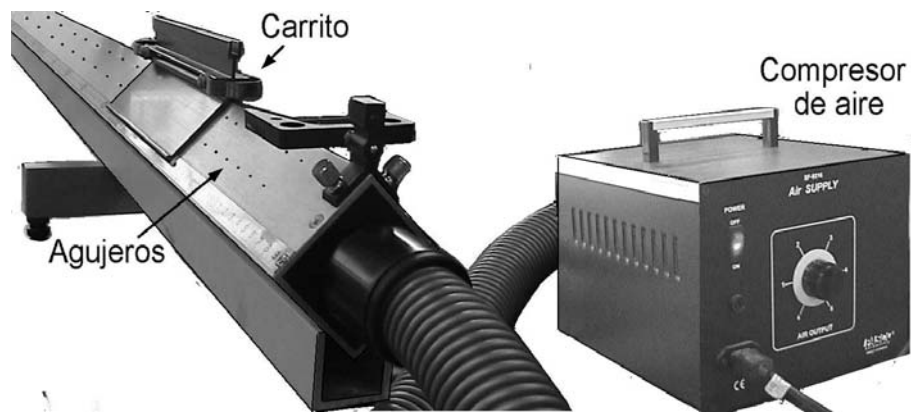


Fig. 1: Carril con su unidad compresora de aire

Encienda el compresor. Monte cuidadosamente un carrito sobre el riel del carril. Si el sistema está nivelado, el carrito permanecerá sin desplazarse apreciablemente. Si se observa un movimiento sistemático, es porque el riel no se encuentra nivelado. En este caso, nivélelo usando el apoyo ajustable hasta que el carrito no muestre movimiento traslacional sistemático. Fije la posición del tornillo con el sistema de contratuerca en el apoyo. Una vez que concluya con este procedimiento inicial, tenga cuidado de no mover o golpear el carril porque podría sacarlo de alineación.

Las mediciones de tiempos necesarias para alcanzar los objetivos de la práctica se realizan mediante una unidad digital (interfase) que puede ser controlada desde la computadora, (Fig. 2). Tiene dos puertos de entrada S_1 y S_2 , donde van conectadas a respectivas compuertas de *fotosensores*. Estos están constituidos por un par emisor-detector de luz, colocados uno frente al otro que se montan sobre el carril de aluminio en forma transversal.

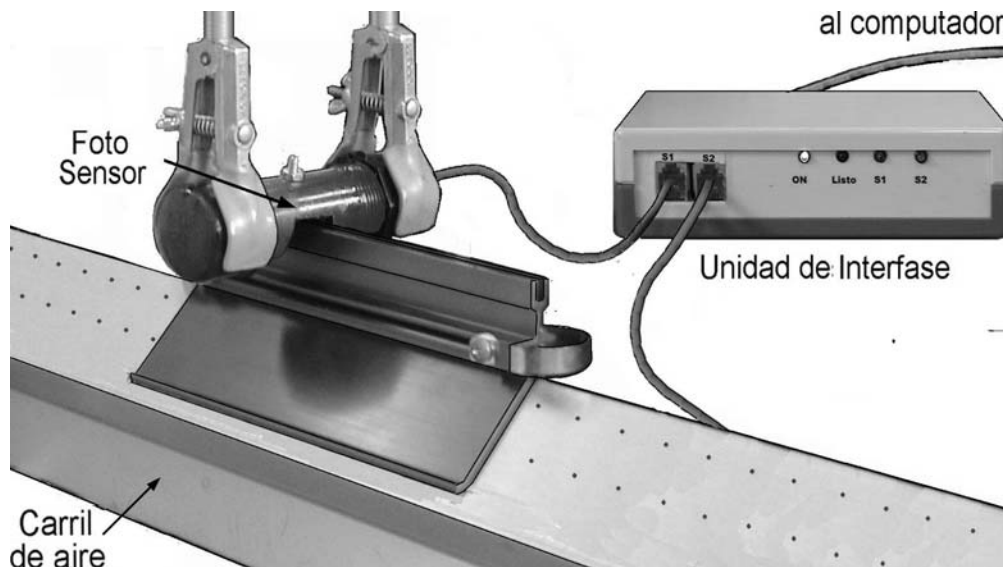


Fig. 2: Unidad electrónica para la medición de intervalos de tiempo

En el contador de tiempo podemos seleccionar dos modalidades de operación. Una que mide el intervalo de tiempo entre dos interrupciones del haz de luz (modo $T_2 - T_1$), esta modalidad se aplica para conocer el tiempo que tarda el móvil en desplazarse entre dos puntos, en ella intervienen los *dos fotosensores* (Fig. 3a); y la otra (modo ΔT), que mide el intervalo de tiempo en que se interrumpe el haz de luz; en esta modalidad interviene *un fotosensor* y se aplica para conocer el tiempo que tarda el cuerpo en pasar frente al detector (Fig. 3b).

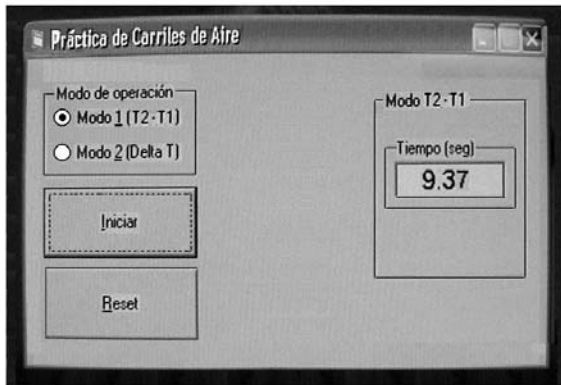


Fig. 3a: Contador *Modo* ($T_2 - T_1$)

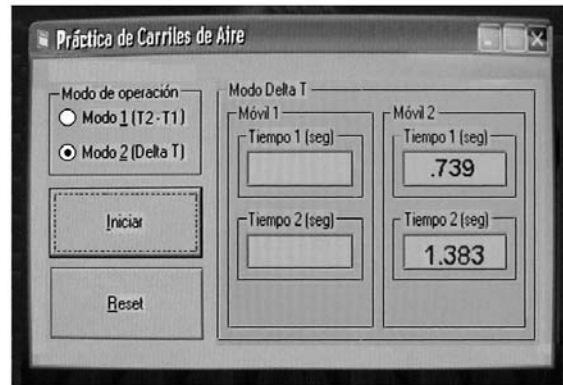


Fig. 3b: Contador *Modo* ΔT

A. Estudio de la distancia recorrida en función del tiempo.

A1. Partiendo del carril de aire en posición nivelada, coloque debajo del apoyo ajustable la cuña, de plexiglas de forma tal que el carril adquiera una inclinación predeterminada (Fig. 4).

El ángulo de inclinación viene dado por la relación entre la altura de la cuña y la longitud entre los puntos de apoyo del carril, $\theta = \text{Arctg} (/)$. Conocido este ángulo, se puede determinar la componente de la aceleración de gravedad en la dirección del riel.

Determine este ángulo y calcule la aceleración lineal que adquiere el carrito en el montaje, considerando que el valor local de la aceleración de gravedad es $9,777828 \text{ m/s}^2$.

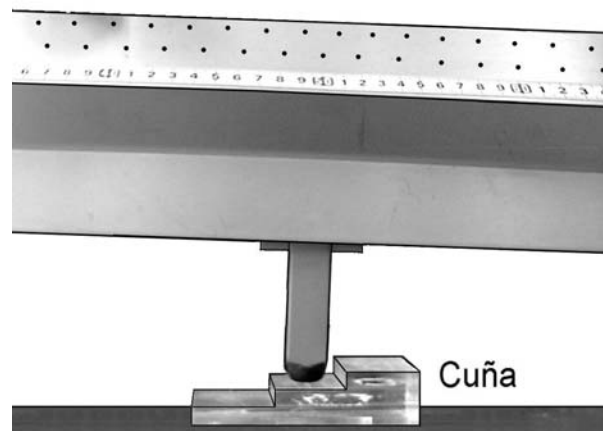


Fig. 4: Cuña de apoyo para inclinar el carril

- A2.** Teniendo cuidado de no golpear el carril de aire, coloque el carrito en el extremo más alto y podrá observar cómo se desplaza éste aceleradamente a lo largo del carril.
- A3.** Coloque el fotosensor T_2 en algún punto cercano al extremo inferior del carril y el fotosensor T_1 en cualquier otro lugar más arriba del carril. Verifique que en la modalidad $T_2 - T_1$, el contador de tiempo se activa cuando el carrito interrumpe la luz en el fotosensor T_1 , y se detiene cuando el carrito interrumpe la luz en el fotosensor T_2 .
- A4.** Determine exactamente el punto del carril, X_F , en el cual el carrito detiene el contador de la unidad. Para ello inicie el contador interrumpiendo la luz en T_1 , y manualmente desplace el carrito frente al fotosensor T_2 para ver en qué posición se detiene el contador. Para determinar la posición, X_i , en que se activa el fotosensor T_1 se procede en forma similar, pero ahora observando en qué instante el contador se activa.
- A5.** Dejando deslizar el carrito desde una posición lo más cerca posible al punto donde se inicia el contador, mida, por lo menos para cinco posiciones uniformemente repartidas del fotosensor T_1 a lo largo del carril, el intervalo $\Delta T = T_2 - T_1$. Repita cada medición cinco (5) veces.
 Prepare una tabla en la hoja de cálculo como se indica a continuación, donde se ha calculado para cada medida el intervalo promedio $\langle t_i \rangle$, el correspondiente error de esa media, y la distancia D_i , recorrida en el intervalo. Con su error correspondiente.

Tabla 1

posición inicial	X_{11}	X_{12}	X_{15}
medidas del tiempo T	$t_{1,1}$	$t_{2,1}$	$t_{5,1}$
	$t_{1,2}$	$t_{2,2}$	$t_{5,2}$

	$t_{1,5}$	$t_{2,5}$	$t_{5,5}$
T promedio	$\langle t_1 \rangle$	$\langle t_2 \rangle$	$\langle t_5 \rangle$
Desviación estándar				
Error absoluto En T medio				
Distancia $D = X_i - X_F$	D_1	D_2	D_5
Error absoluto ΔD	ΔD_1	ΔD_2	ΔD_5

Nota: Trate de mantener fija la distancia entre el punto desde el cual suelta el carrito y el punto donde se activa el contador, por ejemplo, del orden de 3 ó 4 mm. Al soltarlo tenga cuidado para no imprimírle una velocidad inicial.

A6. Elabore con los datos del paso anterior, una gráfica de D vs T . Incluya los errores en cada punto. Hágale un ajuste de mínimos cuadrados utilizando la modalidad polinómica, de grado 2, que pase por cero, y que muestre la ecuación de la curva. Discuta sus resultados en término de la ecuación de la distancia recorrida en función del tiempo.

¿Cómo se compara el valor de la aceleración así obtenida con la aceleración que fue calculada en el paso **A1**, (componente de \vec{g} , en la dirección del riel)?

La curva del paso anterior muestra un término lineal. Este puede correlacionarse con la existencia de una velocidad inicial del movimiento. El mismo corresponde a un error sistemático que no puede evitarse con el montaje experimental que se cuenta en el laboratorio. A continuación procesaremos los datos experimentales para corregirlos por este error sistemático.

A7. El coeficiente del término lineal corresponde directamente a la velocidad inicial v_0 del movimiento (Ec. 4). Utilizando la ecuación 3, con la aceleración a que obtuvo y el valor de esta velocidad, que era la inicial para la etapa del movimiento que medía con el contador pero la final para el movimiento previo, calcule el tiempo que demora en alcanzar esa velocidad *partiendo del reposo* así como también la distancia que recorre hasta alcanzarla.

A8. Como Ud. debe haber tomado la precaución de haber mantenido aproximadamente constante la distancia que anticipó al punto de soltar el carrito respecto al punto que activaba el contador, es posible que Ud. corrija sus datos sumándole a cada tiempo t_i y distancia D_i , los valores que obtuvo en el paso anterior. Repita el gráfico del paso **A6** y discuta estos nuevos resultados.

B. Estudio de la velocidad en función de la distancia recorrida.

En esta parte se usará el carrito de menor longitud para medir la velocidad que adquiere para distintos desplazamientos.

B1. Sin haber cambiado las condiciones de nivelado del carril, proceda ahora a instalar el fotosensor T_2 a una distancia de aproximadamente 30 cm del extremo inferior del carril. Con la modalidad ΔT en el contador de tiempo, verifique que este se activa al interrumpirse la luz y se detiene al cesar la interrupción.

B2. Determine exactamente la posición X_A del riel donde se activa el conteo de la unidad, y la longitud, L , del carrito.

- B3.** Deje deslizar el carrito, desde al menos cinco (5) posiciones X_i repartidas a lo largo de la porción del carril más alta que la posición donde se instaló el fotosensor T_2 . Se recomienda que incluya medidas para puntos de lanzamiento muy cerca del punto donde se activa el contador, por ejemplo, 1, 2, 4, 8, 16, 30, 50 cm sobre el punto de arranque del contador), mida el tiempo Δt_i que demora el carrito en pasar frente al fotosensor. Repita cada medición de tiempo cinco (5) veces.

Tabla 2

Posición inicial	X_{11}	X_{12}	X_{15}
Medidas del tiempo T	$t_{1,1}$	$t_{2,1}$	$t_{5,1}$
	$t_{1,2}$	$t_{2,2}$	$t_{5,2}$

	$t_{1,5}$	$t_{2,5}$	$t_{5,5}$
T promedio	$\langle t_1 \rangle$	$\langle t_2 \rangle$	$\langle t_5 \rangle$
Desviación estándar de $\langle t_i \rangle$				
Error absoluto Δt	Δt_1	Δt_2	Δt_5

Observe que cuando dividimos la longitud L del carrito entre el intervalo t_i , lo que se obtiene es la *velocidad media* en ese intervalo, pero no la velocidad instantánea V_F del móvil en la posición x_A en el momento en que se activa el contador.

Como el carrito está acelerado, en la primera mitad del intervalo la velocidad es menor que en la segunda mitad, y la longitud que ha avanzado el carrito cuando alcanza esa velocidad es menor que un medio de la longitud del carrito. Por lo tanto, la posición final X_F no es aquella X_A donde se activa el fotosensor, sino que corresponde a un punto que está desplazado hacia la porción más baja del riel, en una distancia, $L_{T/2}$, menor que la mitad de la longitud del carrito. En el apéndice de esta práctica se demuestra que la distancia $L_{T/2}$ es:

$$L_{T/2} = \frac{1}{2} \left(L - \frac{at^2}{4} \right)$$

El valor de X_F que se debería usar para calcular el desplazamiento D del carrito es:

$$x_F = x_A - L_{T/2}$$

Donde usamos un estimado para la aceleración a , que puede ser cualquiera de los dos valores antes medidos.

Tabla 3

Velocidad final V_F	V_{F1}	V_{F2}	V_{F5}
Error absoluto de la velocidad	ΔV_{F1}	ΔV_{F2}	ΔV_{F5}
$L_{T/2} = \frac{1}{2}(L - \frac{at_f^2}{4})$	$(L_{T/2})_1$	$(L_{T/2})_2$		$(L_{T/2})_5$
$x_F = x_A - L_{T/2}$	$(x_F)_1$	$(x_F)_2$		$(x_F)_5$
Distancia recorrida $D = X_1 - X_F$	D_1	D_2	D_5
Cuadrado de la velocidad	$(V_{F1})^2$	$(V_{F2})^2$	$(V_{F5})^2$
Error absoluto en D	ΔD_1	ΔD_2	ΔD_7
Error del cuadrado de la velocidad	$\Delta(V_{F1})^2$	$\Delta(V_{F2})^2$	$\Delta(V_{F5})^2$

B4. Elabore con los datos de la **tabla 3** una gráfica de V_F^2 vs D . Incluya los errores en cada punto. Haga un ajuste de mínimos cuadrados utilizando la modalidad de línea recta, con la opción de que pase por cero, y que muestre los parámetros de la recta y la calidad del ajuste.

Determine la *aceleración* a partir del coeficiente de D en la ecuación (5). ¿Cómo se compara el valor obtenido de la aceleración con los que fueron calculados anteriormente?

B5. *Este es un paso adicional opcional.* Utilizando las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo, se puede intentar hacer un gráfico de V vs D . El ajuste pertinente en este caso es el de la modalidad de una potencia de D . Desafortunadamente el software no ofrece la oportunidad de fijar el exponente al valor de 0,5 que es el que corresponde, sino que lo mantiene como un parámetro más a ajustar. En este caso el coeficiente de término elevado a la potencia es $2a$. ¿Cómo se compara este valor con los obtenidos anteriormente?

APÉNDICE

El problema que se nos plantea es el siguiente:

Se tiene un móvil, de longitud L , y aceleración a , que demora un tiempo T en pasar frente a un punto de referencia fijo. La relación L/T es la velocidad media durante el intervalo. ¿Qué punto del móvil tiene la velocidad instantánea igual al valor de la velocidad media?

La forma más sencilla de visualizarlo, y resolverlo también, es en forma gráfica. Al iniciar el móvil el pasaje frente al punto tiene una velocidad V_i , y al concluirlo la velocidad es V_F . Como la aceleración, a , es constante, la velocidad varía linealmente.

La integral desde 0 hasta T de la velocidad es la distancia recorrida por el móvil. Gráficamente podemos calcular esa integral, a partir del área bajo la curva:

$$A_T = L = V_i T + \frac{1}{2}(aT)T = V_i T + \frac{aT^2}{2}$$

ya que a es la tangente del ángulo que forma la recta de la velocidad con la horizontal.

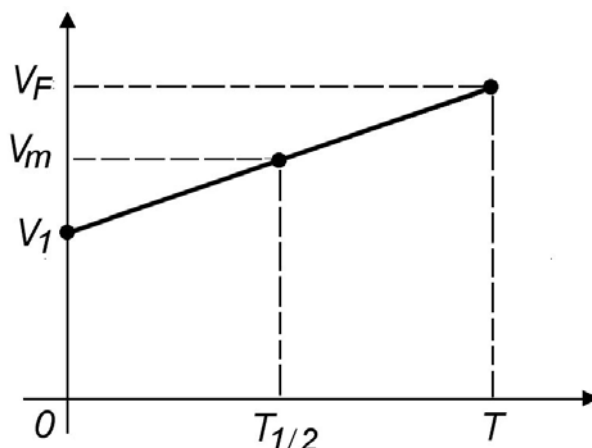


Fig. 5: Variación lineal de la velocidad en función del tiempo.

Ahora la respuesta a nuestra pregunta es simplemente la integral desde 0 hasta $T_{1/2}$, por cuanto en ese instante la velocidad es precisamente el valor medio entre V_i y V_F . Calculando gráficamente de nuevo y tomando en cuenta la expresión anterior, obtenemos:

$$A_{T/2} = L_{T/2} = V_i \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{aT}{2} \right) \frac{T}{2} = \frac{V_i T}{2} + \frac{aT^2}{8} = \frac{1}{2} \left(L - \frac{aT^2}{4} \right)$$

Esta distancia $L_{T/2}$ es un cuarto de la longitud total L para el caso en que el móvil tuviese una velocidad inicial cero, justo en el instante en que empieza a cruzar el punto de referencia. Para el caso en que $\frac{V_F - V_i}{V_i} \rightarrow 0$ tiende a un límite de $\frac{L}{2}$.

REFERENCIAS

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/practica/practica.htm>

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL Y CHOQUES

OBJETIVOS

- Estudiar las colisiones en una dimensión entre dos cuerpos.
- Constatar la conservación de la cantidad de movimiento lineal (momento lineal) en colisiones elásticas e inelásticas.
- Determinar la variación de energía cinética en colisiones elásticas e inelásticas.

MATERIALES

1. Carril de aire con compresor.
2. Tres (3) carritos deslizadores para el carril de aire.
3. Dos (2) compuertas de fotosensores.
4. Unidad electrónica para la medición de tiempos.
5. Balanza

TEORÍA

Los choques o colisiones son encuentros entre dos cuerpos que interactúan durante un tiempo muy breve, mediante fuerzas muy intensas llamadas fuerzas impulsivas. Estas son fuerzas internas del sistema que se caracterizan por ser de gran magnitud y actúan durante un tiempo muy corto de manera muy complicada. Las fuerzas externas que pudieran estar presentes, como la gravedad, son de magnitud despreciable y sus efectos son insignificantes. Por lo tanto, en los choques, podemos considerar que sólo actúan las fuerzas internas, y se conserva la cantidad de movimiento lineal.

Consideramos dos partículas con masas m_1 y m_2 que se mueven sobre la misma recta con velocidades iniciales respectivas \vec{v}_{1i} y \vec{v}_{2i} , y chocan quedando con velocidades finales \vec{v}_{1f} y \vec{v}_{2f} .

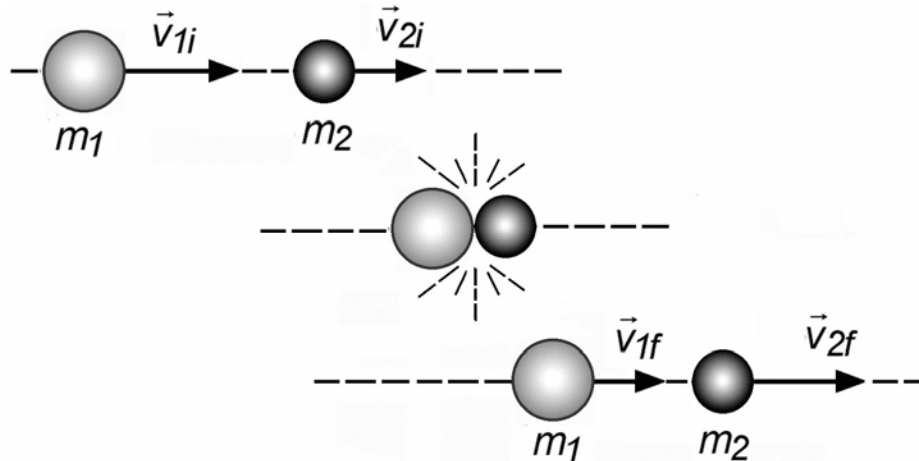


Fig. 1: Choque en una dimensión

Como la cantidad de movimiento total del sistema antes y después del choque es la misma, ($\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$), podemos escribir:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad (1)$$

Aunque durante la colisión, la cantidad de movimiento total del sistema siempre se conserva, parte de la energía cinética original del sistema puede ser transformada por las fuerzas internas en otras formas de energía, como energía térmica, potencial (elástica, eléctrica,...) o de algún otro tipo. En general, los choques se clasifican, según sea la pérdida de energía cinética que ocurra y son de especial interés tres tipos de situaciones:

a) *Choque perfectamente inelástico o plástico*: Es un choque en el que los cuerpos quedan pegados entre sí y continúan moviéndose con una velocidad común.

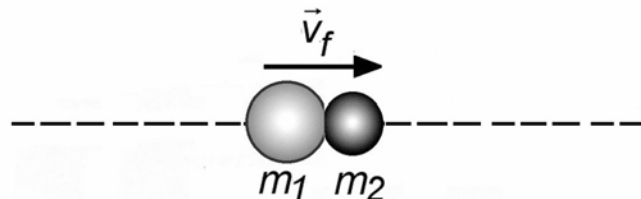


Fig. 2: Choque perfectamente inelástico en una dimensión

Si sustituimos $v_{1f} = v_{2f} = v_f$ en la ecuación anterior, se obtiene la velocidad final común de los dos cuerpos:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

En este tipo de colisión la energía cinética del sistema después del choque es siempre menor que la que había antes del choque. La energía faltante se ha gastado en el proceso de unir los dos cuerpos.

b) Choque perfectamente elástico: Es aquel en que conserva la energía cinética del sistema, es decir, las fuerzas de interacción son tales que después del choque, se le restituye al sistema toda la energía cinética que tenía antes del choque ($E_{ci} = E_{cf}$):

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (2)$$

Si combinamos las ecuaciones (1) y (2) encontramos la relación entre las velocidades relativas antes y después del choque:

$$(v_{2f} - v_{1f}) = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (3)$$

Este es un resultado interesante: *en un choque perfectamente elástico la velocidad relativa de un cuerpo con respecto al otro después del choque, conserva su módulo e invierte su signo.*

c) Choques semi-elásticos y coeficiente de restitución. La mayoría de las colisiones no son ni perfectamente elásticas ni perfectamente inelásticas. El grado de elasticidad de una colisión se mide por el *coeficiente de restitución*, ε . Este se define como el módulo de la razón entre la velocidad relativa de alejamiento después del choque y la velocidad relativa de acercamiento antes del choque:

$$\varepsilon = \left| \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \right| \quad (4)$$

El valor del coeficiente ε puede variar entre cero y uno, dependiendo de la cantidad de energía cinética que se pierde en el choque.

Si el choque es perfectamente plástico se cumple: $v_{2f} - v_{1f} = 0$, y entonces $\varepsilon = 0$.

Si el choque es perfectamente elástico se cumple la ecuación 3 y entonces $\varepsilon = 1$.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

1. Considere un choque perfectamente elástico en 1-dimensión, donde la masa m_1 tiene

una velocidad inicial v_{1i} y la masa m_2 está inicialmente en reposo ($v_{2i} = 0$). Combinando las ecuaciones (1) y (3), demuestre las siguientes expresiones para las velocidades finales después del choque:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \qquad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \qquad (5)$$

2. Aplique estas expresiones para hallar las velocidades finales considerando las masas relativas de las partículas en los tres casos particulares:

- a) $m_1 = m_2$, b) $m_1 > m_2$, c) $m_1 < m_2$

3. Demuestre que en la colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema después del choque es siempre menor que la que había antes del choque.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para la realización de esta práctica contamos con un carril de aire, con su unidad compresora y tres piezas deslizadoras que sirven como móviles, que llamaremos *carritos*. El carril de aire consiste de un tubo hueco de perfil de aluminio con una regla de medición y está provisto de una serie de orificios uniformemente repartidos por los que fluye aire suministrado desde una unidad compresora, con el objeto de minimizar la fricción (Fig. 3).

ADVERTENCIA

Este es un equipo muy delicado que debe manejarse con sumo cuidado. No lo raye, no le pegue cintas adhesivas ni escriba sobre él. Antes de empezar la práctica, si hay un carrito sobre el carril, retírelo levantándolo, no lo deslice sobre la superficie.



Fig. 3: Carril con su unidad compresora de aire

Encienda el compresor. Monte cuidadosamente uno de los carritos sobre el riel del carril. Si el sistema está nivelado, el mismo permanecerá sin desplazarse apreciablemente. Si se observa un movimiento sistemático del carrito, es porque el riel no se encuentra nivelado. En este caso, nivélelo usando el apoyo ajustable hasta que el carrito no muestre movimiento de traslación sistemático. Fije la posición del tornillo con el sistema de contratuerca en el apoyo. En caso que haga falta puede conseguir la nivelación insertando láminas finas en el apoyo. Una vez que concluya con este procedimiento inicial, tenga cuidado de no mover o golpear el carril porque podría sacarlo de alineación, lo cual obligaría a repetir el proceso.

Las mediciones de tiempos necesarias para alcanzar los objetivos de la práctica se realizan mediante una unidad digital (interfase) que puede ser controlada desde la computadora, (Fig. 4). Tiene dos puertos de entrada S_1 y S_2 , donde van conectadas a respectivas compuertas de *fotosensores*. Estos están constituidos por un par emisor-detector de luz, colocados uno frente al otro que se montan sobre el carril de aluminio en forma transversal.

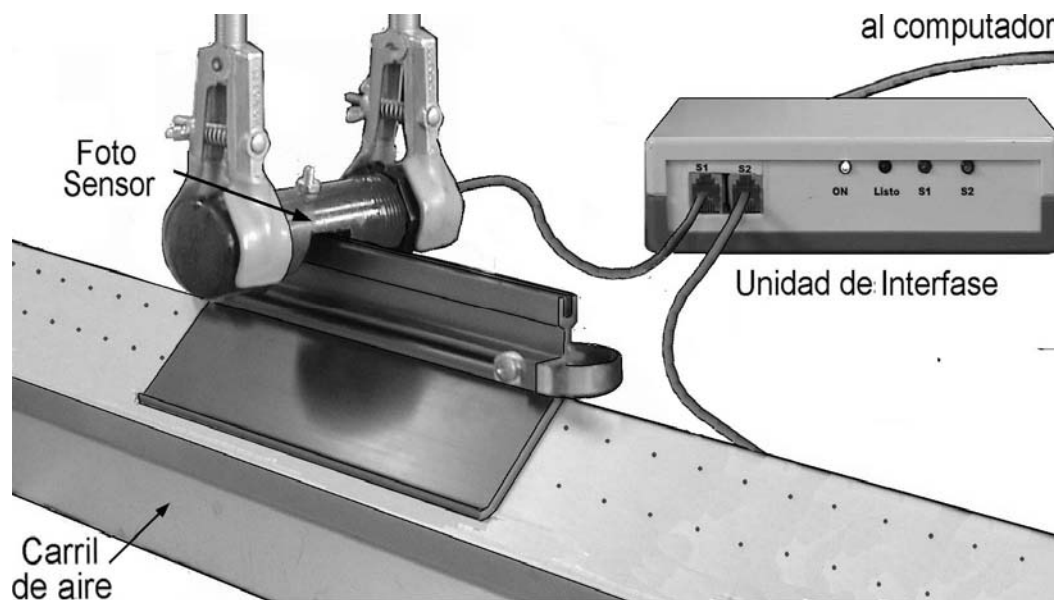


Fig. 4: Unidad electrónica para la medición de intervalos de tiempo

En el contador de tiempo podemos seleccionar dos modalidades de operación. Una que mide el intervalo de tiempo entre dos interrupciones del haz de luz (modo $T_2 - T_1$), esta modalidad se aplica para conocer el tiempo que tarda el móvil en desplazarse entre dos puntos, en ella intervienen los *dos fotosensores* (Fig. 5a); y la otra (modo ΔT), que mide el intervalo de tiempo en que se interrumpe el haz de luz; en esta modalidad interviene *un fotosensor* y se aplica para conocer el tiempo que tarda el cuerpo en pasar frente detector (Fig. 5b).

Para la determinación de las velocidades de los carritos antes y después de los choques, se registran los tiempos t durante los cuales estos interrumpen el haz de luz de los fotosensores, (modo ΔT). La velocidad de los carritos está dada por $v = L/t$,

siendo L la longitud del carrito o distancia que recorre el cuerpo cuando pasa por la compuerta fotosensora desde que se activa hasta que se desactiva.

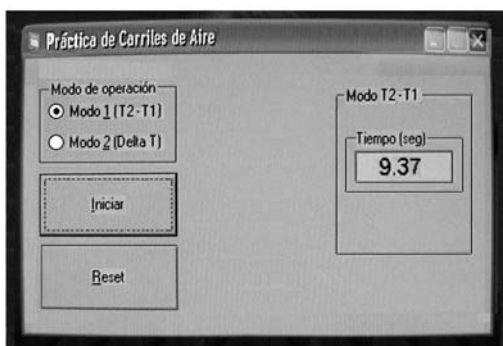


Fig. 5.a: Contador: *Modo* ($T_2 - T_1$)

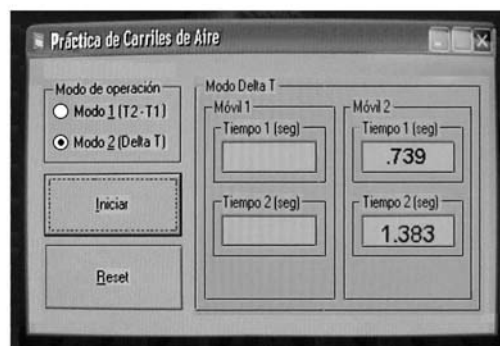


Fig. 5.b: Contador: *Modo* ΔT

A. Choque de un cuerpo contra otro en reposo: vista cualitativa

A1. Sin haber cambiado las condiciones de nivelado del carril, mantengan en reposo un carrito e imprímale velocidad a un segundo carrito de la *misma masa*, hacia el primero (Fig. 6). Describan cualitativamente el choque.

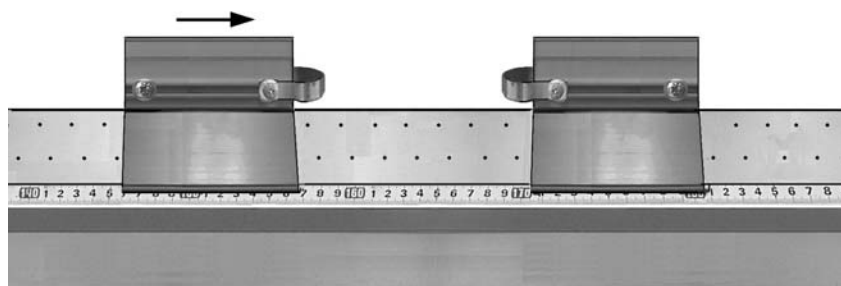


Fig. 6: Choque entre dos carritos de masas iguales

A2. Repitan el paso A1 con el carrito en reposo de una masa menor que la del carrito que se desplaza (Fig. 7). Describan cualitativamente el choque.

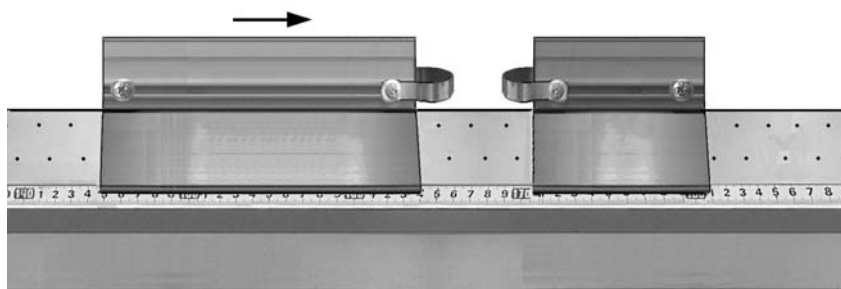


Fig. 7: Choque entre dos carritos de masas desiguales

A3. Ahora repitan el paso A2 intercambiando el carrito que está inicialmente en reposo con el que es lanzado. Es decir que el carrito en reposo tenga una masa mayor que la del que se lanza. Describan cualitativamente el choque.

B. Choque elástico entre dos cuerpos de masas iguales.

B1. Utilicen dos carritos de masas iguales. Anoten los valores de estas masas.

B2. Para determinar la velocidad inicial de un carrito y la velocidad final del otro, coloquen los dos fotosensores separados una a cierta distancia uno del otro. En el carril monten un carrito, en reposo, entre los fotosensores y el otro, fuera de ellos, para ser impulsado por la banda de goma, dispónganlos de manera que choquen por el lado que tienen los muelles. Seleccionen en el contador la modalidad ΔT , para medir, independientemente, los tiempos necesarios para calcular la velocidad inicial de un carrito y la velocidad final del otro.

B3. Hagan chocar los carritos y anote los tiempos t_{1i} durante el cual el primer carrito interrumpe el haz de luz antes del choque y t_{2f} durante el cual el segundo carrito interrumpe el haz de luz después del choque. Repitan el choque cinco veces.

Usando la hoja de cálculo determinen para **cada móvil**: la velocidad inicial y final; el momento lineal inicial y final; la energía cinética inicial y final.

Tabla 1

t_{1i}	t_{2f}	v_{1i}	v_{2f}	p_i	p_f	E_i	E_f

A partir de esos valores determinen ahora para **el sistema**: el momento lineal inicial y final y el cambio de momento relativo; la energía cinética inicial y final y el cambio de energía relativo.

Tabla 2

p_i	p_f	$\Delta p/p_i$	E_i	E_f	$\Delta E/E_i$

B4. Discutan sus resultados en términos de las leyes de conservación en un choque parcialmente elástico.

C. Choque elástico entre dos cuerpos de masas desiguales

- C1.** Utilicen dos carritos de masas desiguales. Anoten los valores de estas masas.
- C2.** Coloquen el carrito grande (m_2) en reposo entre los dos fotosensores y el pequeño (m_1) para ser impulsado por la banda de goma de manera que choque con m_2 por el lado que tienen los muelles. Háganlos chocar y anote los tiempos t_{1i} durante el cual el carrito pequeño pasa por primera vez delante del fotosensor 1, y t_{1f} durante el cual pasa la segunda vez. Asimismo, el tiempo t_{2f} durante el cual el carrito grande pasa delante del fotosensor 2. Detenga los carritos tan pronto estos reboten en los extremos del carril.
- C3.** Usando la hoja de cálculo determine la velocidad inicial y las velocidades finales y el coeficiente de restitución. Asimismo, para el sistema de los dos carritos calcule los momentos iniciales y finales, el cambio de momento relativo, las energías cinéticas iniciales y finales y el cambio de energía relativo. Repita el choque cinco veces.

Tabla 3

Móvil							Sistema					
t_{1i}	t_{1f}	t_{2f}	v_{1i}	v_{1f}	v_{2f}	ε	p_i	p_f	$\Delta p/p_i$	E_i	E_f	$\Delta E/E_i$

D. Choque inelástico de un cuerpo contra otro en reposo

- D1.** Tomen dos carritos de masas desiguales y colóquense *plastilina* a uno de ellos en un extremo de forma tal que al chocar puedan quedar adheridos. Manteniendo inicialmente el carrito pequeño en reposo, háganlos chocar. Observen el movimiento resultante.
- D2.** Coloquen los dos fotosensores separados una cierta distancia uno del otro, ubiquen el carrito pequeño en reposo entre las dos compuertas y el grande fuera de ellas, para ser impulsado por la banda de goma de manera que choquen por el lado que tienen la plastilina y continúen juntos después del choque. Seleccionen en el contador la modalidad ΔT , (Figura 3b), para medir, independientemente, los tiempos necesarios para calcular la velocidad inicial del carrito grande y la velocidad final del conjunto.
- D3.** Hagan chocar los carritos y anoten los tiempos t_{1i} durante el cual el carrito grande pasa delante del fotosensor 1 y el tiempo t_{2f} durante el cual los dos carritos

pegados pasan delante del fotosensor 2. Detengan los carritos tan pronto estos reboten en los extremos del carril.

- D4.** Usando la hoja de cálculo determinen la velocidad inicial del carrito grande v_{1i} y la velocidad final de los dos carritos pegados, v_{2f} . Asimismo, para el sistema de los dos carritos determine el momento inicial y final, el cambio de momento relativo, la energía cinética inicial y final y el cambio de energía relativo. Repita el choque cinco (5) veces y refleje el resultado de sus cálculos en una tabla como la siguiente.

Tabla 4

Móvil				Sistema					
t_{1i}	t_{2f}	v_{1i}	v_{2f}	p_i	p_f	$\Delta p/p_i$	E_i	E_f	$\Delta E/E_i$

- D5.** Discuta sus resultados en términos de las leyes de conservación en un choque perfectamente inelástico.

PREGUNTAS

- ¿Por qué es importante realizar este experimento con el carril perfectamente nivelado?. Es razonable la suposición de que las fuerza externas sobre el sistema son nulas?
- ¿Ha podido Ud. constatar la conservación del momento lineal en todos los choques? Discuta las posibles causas de las diferencias.
- ¿Cómo se comparan las pérdidas fraccionales de energía en los choques perfectamente *inelásticos* (parte D) con las correspondientes a los choques parcialmente *elásticos* (parte C)? Discuta las posibles causas de las pérdidas de energía que han ocurrido.

REFERENCIAS

- D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Cap. 15, Ed. Continental (1995).
- <https://www.msu.edu/~brechtjo/physics/airTrack/airTrack.html>

PÉNDULO DE TORSIÓN

OBJETIVOS

- Determinar la constante de torsión de un péndulo.
- Estudiar la dependencia del período de oscilación con el momento de inercia.
- Determinar experimentalmente el momento de inercia de un objeto en forma de volante.

MATERIALES

1. Aparato de torsión.
2. Hilo de torsión.
3. Disco.
4. Barra.
5. Dos pesas.
6. Volante.
7. Cronómetro.
8. Vernier.
9. Balanza.
10. Juego de llaves Allen.

TEORÍA

Un péndulo de torsión consiste, en su forma más sencilla, en un cuerpo rígido suspendido por medio de un alambre (hilo de torsión) el cual está sujeto a un soporte fijo, como indica la figura 1. Cuando el cuerpo se aparta de su posición de equilibrio, haciéndolo girar en torno al eje, el alambre se tuerce y ejerce un torque de restitución τ sobre el cuerpo y éste tenderá a volver a la posición de equilibrio, ejecutando una serie

de oscilaciones. Para ángulos de torsión pequeños el torque resulta proporcional al desplazamiento angular θ (versión de la Ley de Hooke análoga a $F = -kx$), es decir:

$$\tau = -k\theta \quad (1)$$

en donde k se conoce como la constante de torsión del alambre.

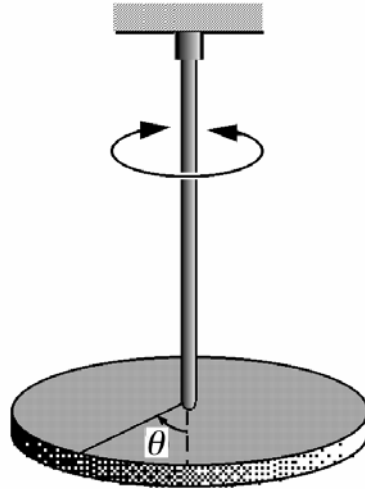


Fig. 1: Un péndulo de torsión

El torque recuperador τ proporciona una aceleración angular α y, de acuerdo a la 2ª ley de Newton para el movimiento de rotación,

$$\tau = I\alpha = I\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \quad (2)$$

siendo I el momento de inercia del péndulo de torsión alrededor del eje perpendicular que pasa por su centro de masa. Igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{k}{I}\right)\theta \quad (3)$$

Podemos identificar esta ecuación como la de un movimiento armónico simple, cuya frecuencia angular es: $\omega = \sqrt{k/I}$ y el período correspondiente es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (4)$$

El péndulo de torsión tiene una variedad de aplicaciones. Por ejemplo, las oscilaciones por torsión constituyen la base de funcionamiento de relojes mecánicos y también de galvanómetros de laboratorio.

Se puede utilizar el péndulo de torsión para determinar la constante de torsión de un alambre. Si a partir de otras medidas o cálculos conocemos el momento de inercia del sistema, la medida del período de oscilación nos da de inmediato el valor de k , con ayuda de la ecuación (4).

Una vez determinada la constante de torsión, también podemos utilizar el péndulo como un instrumento sensible para medir pequeños torques y pequeñas fuerzas. Como hecho curioso Cavendish, en 1798, utilizó un péndulo de torsión para determinar la constante G de gravitación universal y con este valor pudo así indirectamente, *pesar la Tierra!*

ACTIVIDADES PRELIMINARES

En la sección B se considera un cuerpo constituido por una barra y dos pesas ubicadas simétricamente (figura 2). La expresión que se usa para el momento de inercia, respecto a su eje perpendicular de simetría, es una aproximación. Deduzca la expresión teórica exacta para el momento de inercia que toma en cuenta todas las dimensiones de los objetos.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El aparato de torsión que usaremos en este experimento consiste en un soporte con su base, del cual se sujeta firmemente un alambre delgado, por su extremo superior. En el extremo inferior del alambre, pueden suspenderse objetos de formas geométricas variadas, los cuales pueden oscilar libremente. El aparato también está provisto de una escala graduada y de un indicador angular del objeto que oscila. Los períodos de oscilación del péndulo se miden mediante un cronómetro electrónico, accionado manualmente.

Antes de iniciar el experimento, deben familiarizarse con las diferentes partes del aparato y con el funcionamiento del cronómetro

A. Determinación de la constante de torsión

A1. Tomen el disco y determine su masa M (en kg) y su radio R (en metros) para calcular su momento de inercia.

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2$$

Determinen el correspondiente error.

A2. Procedan a instalar el disco en el extremo de la varilla.

- A3.** Hagan oscilar el péndulo y determine el período de las oscilaciones (*en segundos*). Para ello se recomienda medir el tiempo que tarda en realizar 10 oscilaciones.
- A4.** Repitan el procedimiento anterior *10 veces* (¿para qué?) y calcule el promedio, la desviación estándar (σ) y la desviación estándar de la media.
- A5.** Calculen la constante de torsión k del péndulo y su correspondiente error.

B. Variación del período de oscilación del péndulo con el momento de inercia

Una barra de masa M y largo L tiene un momento de inercia respecto de su eje:

$$I_b = \frac{1}{12} ML^2$$

Si le agregamos dos pesas de masa m , a distancia r de su centro como en la figura 2, el momento de inercia total será:

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + 2mr^2$$

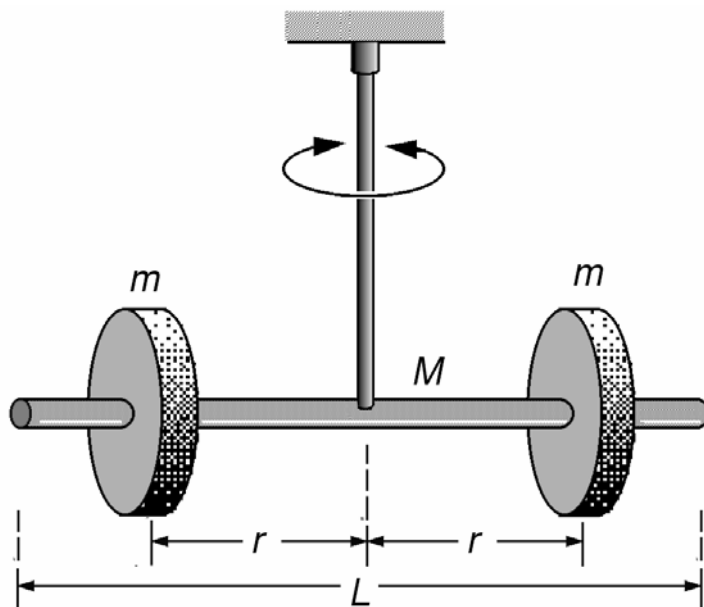


Fig. 2: Péndulo constituido por barra y dos pesas

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 4, se obtiene la siguiente ecuación para el período de rotación de este sistema respecto de su eje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2/12 + 2mr^2}{k}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, se obtiene:

$$T^2 = \frac{\pi^2 ML^2}{3k} + \left(\frac{8\pi^2 m}{k}\right)r^2 \quad (5)$$

Esta ecuación expresa la dependencia del cuadrado del período en función del cuadrado de la distancia de las pesas al centro de rotación.

- B1.** Desmonten el disco del aparato y coloque en su lugar la barra. Coloque en la barra las dos pesas de manera que queden equidistantes del eje de simetría.
- B2.** Procedan a medir el período de oscilación del péndulo en función de la distancia radial r de las pesas. Para ello deben cambiar la posición de las pesas por lo menos en 10 mm para cada medida y realizar 10 medidas del período en cada una de estas posiciones. Determinen la desviación estándar de la media (σ / \sqrt{N}) para el período correspondiente a cada posición de las pesas.
- B3.** Construyan una tabla con los datos de la distancia radial r a las pesas y de los períodos T correspondientes. Agreguen a la tabla columnas con los valores del cuadrado de los períodos y de la distancia radial, así como con los errores correspondientes.
- B4.** Elaboren un gráfico lineal del cuadrado del período (*en s²*) en función del cuadrado de la distancia radial (*en metros*). Incluya barras de error en las dos variables.
- B5.** Determinen la pendiente de la recta y su intersección con el eje de T^2 . Para ello hagan un ajuste de mínimos cuadrados a los datos y determine la ecuación empírica de la recta.
- B6.** Midan la longitud de la barra y las masas de la barra y de las pesas y con estos valores calculen el valor teórico de la pendiente y la intersección de la recta.
- B7.** Comparen los valores experimentales y teóricos de la pendiente e intersección de la recta. Justifiquen las discrepancias que puedan existir con base en los errores de medición que usted ha estimado en este experimento.

C. Determinación del momento de inercia de un volante

- C1.** Procedan a suspender de la varilla el objeto en forma de volante (figura 3).
- C2.** Determinen el período de oscilación del volante.

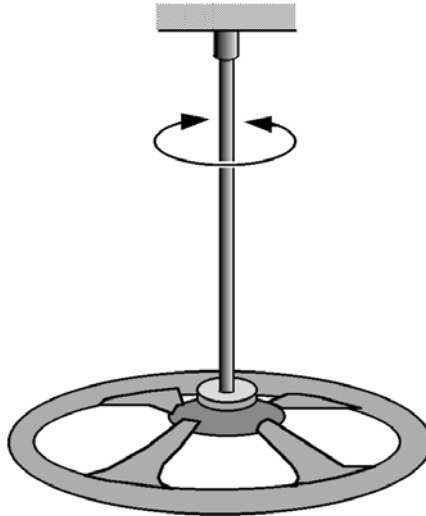


Fig. 3: Un volante como péndulo

- C3.** Usando los resultados anteriores, determinen el momento de inercia del volante y estime el correspondiente error.

PREGUNTAS

1. En el péndulo físico la validez de la expresión del período (Ec. 4) está condicionada a ángulos de oscilación pequeños (aproximación $\text{sen } \theta \approx \theta$). ¿Por qué no existe esta restricción para el péndulo de torsión?
2. ¿Cómo influye en sus medidas el hecho de que haya movimientos superpuestos a la oscilación torsional y qué precauciones hay que tomar para minimizar estos movimientos?
3. ¿Por qué no se toma en cuenta el momento de inercia del alambre del péndulo?
4. ¿Podrían determinarse en esta práctica momentos de inercia de cuerpos irregulares, como una llave inglesa, un martillo, etc..? ¿Cómo determinarían el punto de suspensión apropiado?

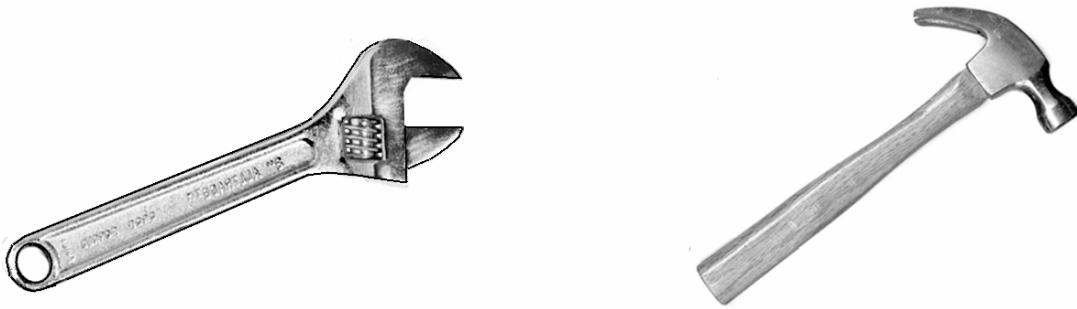


Fig. 4: Una llave inglesa y un martillo

- P5.** ¿Cuál es el momento de inercia del volante respecto de un eje E_A que pase por su borde radial y paralelo el eje de simetría?

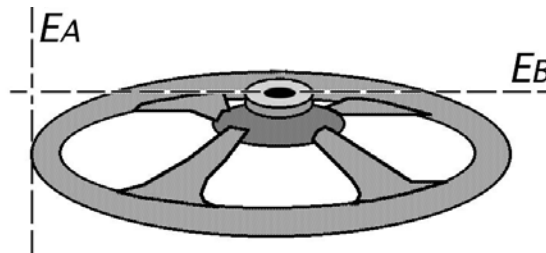


Fig. 5

- P6.** ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia del volante respecto de un eje E_B que pase por su centro y sea perpendicular al eje de simetría?

REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Cap. 15, Ed. Continental (1995).
2. R. M. Eisberg y L. S. Lerner, *Física*, Vol. 1, Cap. 10, Mc. Graw-Hill (1983).
3. R. A. Serway, *Física*, tomo. 1, Cap. 13, Mc. Graw-Hill (1992).

APENDICE

Uno de los cinco instrumentos de “Péndulo de torsión” es de diseño diferente: (Ver las figuras 4 y 5) En lugar de una varilla posee dos alambres finos de forma que las piezas que oscilan se encuentran en el centro entre los dos alambres. Esto no cambia la teoría desarrollada. Solo cambia la forma como se sujetan las piezas y el orden de realización de su experiencia: Realice primero la parte A, segundo la parte C y finalmente la parte B.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

A. Determinación de la constante de torsión

Proceda a realizar la experiencia como descrita anteriormente en esta parte A.

C. Determinación del momento de inercia de un cuerpo irregular

C1. Proceder a suspender el cuerpo con forma irregular. (Figura 5)

C2. Determinen el período de oscilación de este cuerpo.



Fig. 4: Péndulo de torsión



Fig. 5 Cuerpo con forma irregular

C3. Usando los resultados anteriores, determine el momento de inercia I_x y estime el correspondiente error.

B. Variación del período de oscilación del péndulo con el momento de inercia

Realice la experiencia como se describe en la parte B de la guía. La única diferencia es que en este caso la barra se inserta en el cuerpo de forma irregular medido anteriormente.

Hay que tomar en cuenta que en este caso lo que oscila son tres piezas: 1.- La barra, 2.- Las pesas colocadas sobre la barra y 3.- El cuerpo con forma irregular con momento de inercia I_x . Por lo tanto el momento de inercia total tiene tres términos correspondientes:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2 + I_x$$

En consecuencia la ecuación para el período de rotación de este sistema respecto de su eje es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2/12 + 2mr^2 + I_x}{k}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, se obtiene:

$$T^2 = \frac{\pi^2 ML^2}{3k} + \left(\frac{8\pi^2 m}{k}\right)r^2 + \frac{4\pi^2 I_x}{k} \quad (6)$$

Esta ecuación expresa la dependencia del cuadrado del período en función del cuadrado de la distancia de las pesas al centro de rotación.

APÉNDICE A1

EL INFORME DE LABORATORIO

OBJETIVO

- Ilustrar al estudiante sobre la redacción de un informe convenientemente estructurado y enfatizar la importancia de la comunicación escrita del trabajo experimental.

I. Motivación

Para un científico o un ingeniero es de vital importancia el desarrollar la capacidad de comunicar sus resultados en forma oral y escrita, de suerte tal que sean comprensibles aún por personas no involucradas directamente con el trabajo experimental.

El informe escrito suele ser el único material tangible que se le presenta a los superiores, clientes o colegas, y de él dependerá la valoración de la actividad profesional, así como también la toma de decisiones por parte de otras personas. De la misma manera, el informe escrito será la herramienta fundamental de evaluación de su actividad durante los cursos de laboratorio.

Antes de pasar a detallar la estructura general del informe, queremos enfatizar que la *habilidad para la interpretación, relación y discusión de los resultados* es el rasgo distintivo de científicos o ingenieros capaces y pensantes.

II. El Informe

El informe deberá ser claro, **CONCISO** y **BIEN ESTRUCTURADO**. Igualmente el informe debe ser explícito y argumentado; en particular, debe presentar claramente los resultados. Carece de sentido y a la vez denota una actitud desconsiderada para el lector, el presentar simplemente una colección de ecuaciones, tablas y figuras, que no estén enmarcadas dentro de un texto que las explique claramente dentro de una secuencia lógica.

El informe debe explicar el contexto dentro del cual está enmarcado el trabajo en cuestión y también debe analizar y discutir los resultados.

Todas las tablas, figuras y gráficas deben tener un título o leyenda y estar numeradas secuencialmente. (Tabla 1, Tabla 2,....etc)

Finalmente, apuntamos que el informe se escribe de modo que colegas sin un

conocimiento previo del experimento o problema sean capaces de entenderlo plenamente. Por ello, el informe debe ser auto contenido.

A continuación presentamos un modelo de las partes de un informe de laboratorio: Este modelo no es rígido y se lo debe adaptar adecuadamente en cada caso.

1. Hoja de presentación.

Título de la práctica e identificación del autor o autores.

2. Introducción.

Definición del problema investigado. Debe brindarse una idea o panorama general así como también una breve reseña de los resultados y conclusiones más significativos reportados por otros autores.

La *introducción* debe concluir indicando de manera clara y concisa el propósito y la finalidad de la experiencia (o investigación) y los contenidos del informe.

3. Marco teórico.

Debe presentar un resumen del modelo teórico que permite describir el fenómeno estudiado con las ecuaciones asociadas. La teoría puede predecir resultados o bien puede explicarlos. En este laboratorio los marcos teóricos de las distintas prácticas se pueden encontrar en cualquier libro de física general. Es necesario que Ud. investigue y no se limite a copiar textualmente lo que aparece en esta guía. También deben darse otros detalles que puedan ser de relevancia en el contexto de la práctica, por ejemplo, el conocimiento de un valor muy preciso de alguna constante que se quiera determinar, velocidad de la luz, aceleración de la gravedad en el sitio, número de Avogadro, lo que permitirá concluir sobre la bondad de sus resultados.

4. Esquema del procedimiento experimental.

Debe presentarse el método usado para solucionar el problema que se ataca y dar una idea clara de cómo se ha realizado el experimento.

Se ha de describir del montaje experimental (incluyendo esquemas y/o dibujos). Debe indicarse el rango y apreciación de los instrumentos de medición; Esta sección debe brindar la información requerida por el lector para reproducir los resultados, si así lo desea.

5. Resultados experimentales.

Los resultados de las mediciones con sus errores deben ser tabulados así como los promedios, desviaciones estándar, errores de la cantidad promediada. Los gráficos y su subsiguiente procesamiento (ajustes de curvas) deben ser parte medular del informe y nunca aparecer en anexo.

Debe enfatizarse (nuevamente) que toda cantidad calculada a partir de cantidades medidas debe estar acompañada *siempre* de su respectivo error, obtenido vía propagación.

Si algunos resultados provienen de la repetición de un mismo cálculo a partir de datos tabulados, es conveniente presentarlos a su vez en forma tabulada. En

este caso debe mostrarse en el pie de la Tabla un cálculo tipo para ilustrar cómo se obtienen los resultados tabulados.

6. Discusión y conclusiones.

Esta es la sección más importante del informe. Sin embargo, no es posible dar un esquema para un proceso intelectual como el de relacionar y discutir resultados con miras a concluir creando conocimiento o información; por lo anterior nos limitamos a apuntar que esta sección debe comprender al menos las siguientes consideraciones:

a) Una discusión de la precisión de los resultados. En particular debe discutirse la influencia de los errores (instrumentales y de observación) y las medidas adoptadas para disminuirlos.

b) Debe compararse el resultado experimental y la predicción teórica. Deben discutirse las discrepancias surgidas debido a las idealizaciones utilizadas para predecir algún resultado y la influencia de limitaciones físicas en el resultado real.

c) Cada curva debe ser discutida y explicada: debe siempre determinarse el posible significado de la forma de la curva, del área bajo la misma, de la dependencia (lineal o no) de una variable con respecto a otra.

d) Las dificultades experimentales pueden comentarse, así como también las posibles mejoras que se le puedan hacer a la solución experimental del problema. También pueden sugerirse ideas y posibles desarrollos al lector.

7. Bibliografía.

Nombre y autor(es) de los libros (y otras publicaciones) en los cuales se apoyó la realización o interpretación de la práctica o experiencia.

8. Apéndices.

Debe incluir los detalles que por razones de claridad en la presentación no se incluyen en el texto principal del informe.

IMPORTANTE

Si la práctica tiene dos partes independientes, (Parte A, Parte B) como por ejemplo la determinación de la constante de un resorte por métodos estáticos y dinámicos, entonces Ud. deberá tratar estas dos partes en forma sucesiva. Es decir que su informe tendrá **dos partes** bien distintas.

La primera constará, para el método estático, de Marco teórico, Procedimiento, Resultados, Cálculo de errores y análisis, Discusión y Conclusiones.

La segunda parte será relativa el método dinámico y se repetirán las partes señaladas anteriormente.

Una conclusión general del informe podría ser la comparación de los dos resultados obtenidos por distintos métodos de la constante o la cantidad física que se determinó por distintos métodos.

USO DE LA COMPUTADORA EN EL LABORATORIO

OBJETIVO




- Dar al estudiante algunos lineamientos básicos para el uso de la computadora en el laboratorio.




I. Introducción

Estos laboratorios incorporan la computadora como herramienta básica del trabajo experimental. Por tal hecho se considera absolutamente necesario que el estudiante se familiarice con **su uso adecuado y las facilidades que ella ofrece**.

Durante las sesiones de práctica se utilizarán diversos programas o software bajo ambiente Windows. Estos se clasifican en dos grupos: El primero formado por herramientas básicas para el análisis de datos y el segundo grupo integrado por aplicaciones orientadas a cada experiencia.







II. Uso del computador

1. ENCENDIDO (ON): Encienda el regulador, CPU y Monitor. Espere que culmine de iniciar y aparezca la pantalla de bienvenida de Windows. 
2. INICIO DE SESION (LOGIN): Seleccione la cuenta de estudiante haciendo “click” sobre ella, para comenzar a trabajar. 
3. UBICACIÓN Y ACCESO A PROGRAMAS: Los programas a utilizar en el laboratorio se encuentran como accesos directos dentro del menú de inicio de Windows. 

4. GUARDAR INFORMACION: Para almacenar información seleccione la opción “guardar” de la aplicación que este utilizando, para esto  dispone de la carpeta de mis documentos.
5. IMPRIMIR: Antes de imprimir verifique la disposición y el contenido  de los datos, utilizando la opción **vista preliminar**. Para imprimir selecciones la opción “imprimir” del menú de herramientas. 
6. APAGADO (OFF): Seleccione la opción apagar equipo ubicada en el menú de inicio, confirme “apagar”, luego apague el monitor.



7. Normas en el uso de las computadoras

- 7.1 No se permite la instalación de software a los usuarios, ni modificar el existente.
- 7.2 Está prohibido mover de su lugar los equipos de  computación.
- 7.3 No fumar ni consumir ningún tipo de alimentos o bebidas   dentro de los laboratorios.
- 7.4 No es recomendable utilizar borradores ni saca puntas cerca de los teclados y  mouse de los computadores.
- 7.5 El estudiante es responsable del equipo que este utilizando. El uso indebido o perdida de algún accesorio será su  responsabilidad.
- 7.6 Se prohíbe de manera expresa la consulta a sitios web de  contenido pornográfico, salas de chat y juegos.
- 7.7 Contribuir al cuidado y conservación de las instalaciones y equipos.
- 7.8 Notificar al personal encargado cualquier irregularidad en los equipos.
- 7.9 Al terminar la sesión apagar correctamente todos los equipos.

III. Excel Básico:

1. Conociendo Excel:

- Qué es Excel:

Excel es un programa de hoja de cálculo que nos ayuda a realizar cálculos estadísticos, matemáticos, financieros, creación de gráficas, vínculos entre hojas de cálculo; entre otras utilidades que podemos encontrar.

- Entorno de trabajo:
-

Cuando inicia Excel, abre la pantalla estándar como se muestra en la figura 1.

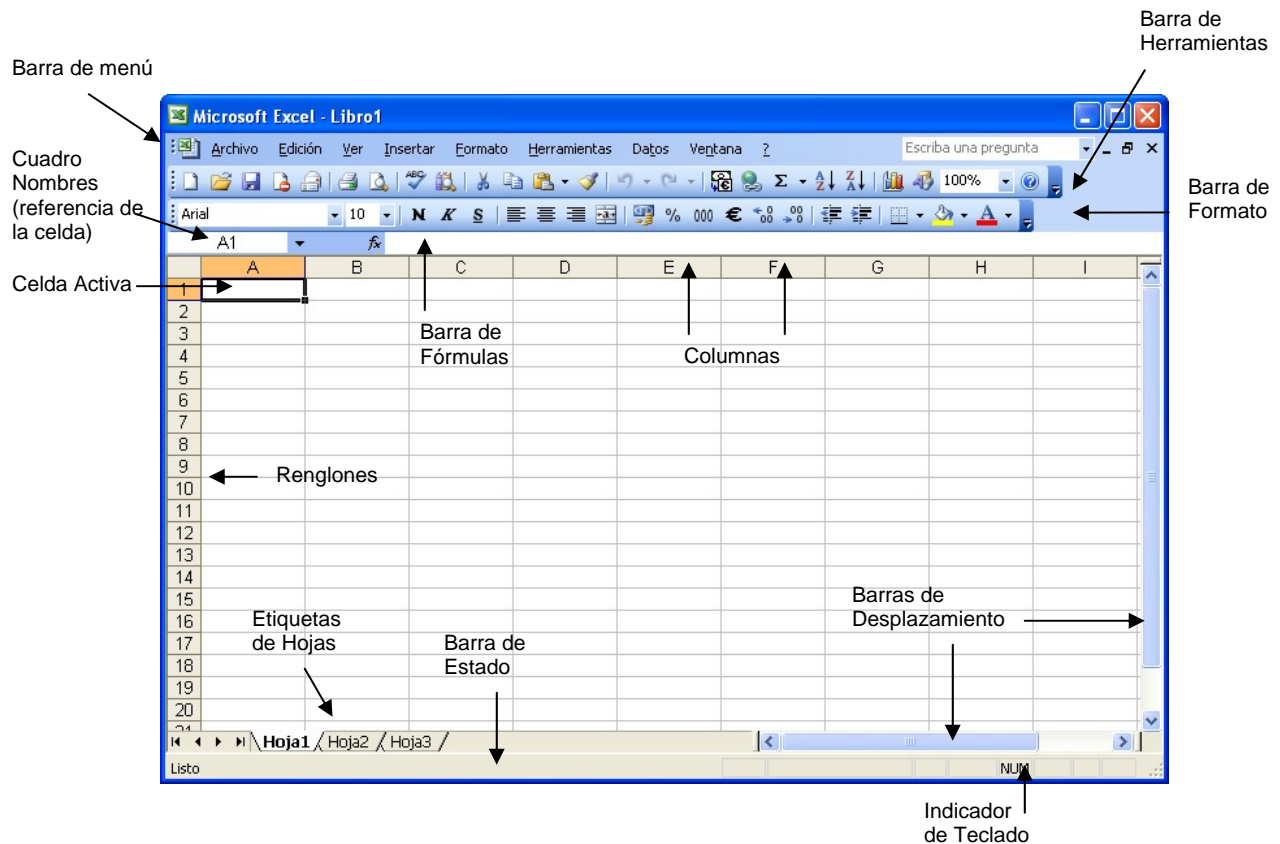


Figura 1.

Excel se compone por el libro de trabajo que es el mismo archivo, cuando comenzamos a trabajar se genera el Libro1 conforme se abre otro archivo genera el Libro2 y así sucesivamente. Cada libro consta de varias hojas, por lo general aparecerán 3 hojas. Como cualquier archivo se puede grabar con el nombre deseado y la extensión xls; también a las hojas se les puede dar un nombre.

Cada hoja contiene 256 columnas y 65536 renglones por lo que tenemos un espacio bastante amplio para trabajar. Una celda es la intersección de cada columna con cada fila. La celda activa es la celda seleccionada, para saber la referencia de la celda activa, podemos verla en el cuadro de nombres en la parte superior izquierda de la pantalla,

como se puede observar en la Figura 1. Como en todos los programas de Office se tienen las 3 diferentes barras: menú, herramientas y formato.

2. Introducción de Datos:

Una hoja de cálculo es el documento principal que se utiliza para el almacenamiento y manipulación de datos. Cada una es una cuadrícula rectangular conformada por filas y columnas. La intersección entre cada columna y cada fila es una celda, que es la unidad básica de la hoja de cálculo en la cual se almacenan los datos. Si desea crear una hoja de cálculo nueva haga clic en la opción Nuevo del menú Archivo o presione el botón Nuevo en la barra de herramientas estándar. Para grabar los cambios haga clic en la opción Guardar del menú Archivo o presione el botón Guardar en la barra de herramientas estándar

Para introducir datos en una celda, haga clic en la celda en la que desee introducir los datos. Escriba los datos y presione INTRO o TAB. Utilice una barra o un guión para separar las partes de la fecha; escriba, por ejemplo 9/5/96 o Jun-96. Para introducir una hora según el horario de 12 horas, escriba un espacio y, a continuación, a ó p detrás de la hora, como por ejemplo, 9:00 p. De lo contrario, Microsoft Excel introducirá la hora como a.m.

3. Ordenación de Datos

La ordenación nos puede servir para cuando tenemos un listado que se requiera organizar para una mejor visión de los datos. Si se trata de datos textuales, la ordenación se realiza alfabéticamente en forma ascendente o descendente, y los datos numéricos se ordenan de menor a mayor o viceversa.

La ordenación se realiza en base a tres criterios, tomando en cuenta antes el primer criterio, en caso de haber dos criterios iguales, toma en cuenta el segundo criterio para ordenar.

Debemos hacer los siguientes pasos:

1. Seleccionar la lista a ordenar
2. Elegir el menú DATOS-ORDENAR
3. Seleccionar los criterios a ordenar
4. Seleccionar si se ordenan en forma ascendente o descendente
5. Si se tiene encabezado de la lista activar la casilla, si no tiene, aparecerá en los criterios como columna A, B, C.

4. Fórmulas:

- Fórmulas en Excel

Las fórmulas nos ayudan a obtener un resultado de cualquier cálculo que se realice. Además de contar con funciones predeterminadas que también nos facilitan a realizar otras operaciones.

- Elementos de una fórmula

Para que Excel identifique que se realizará una fórmula o una función debemos comenzar siempre con el signo igual “=”.

Una fórmula se compone de varios elementos:

1. Referencia de celdas
2. Valores
3. Operadores
4. Funciones

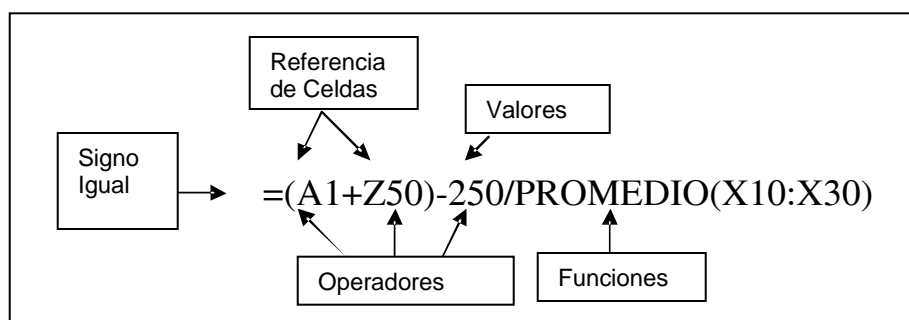


Figura 2.

ELEMENTOS	DESCRIPCIÓN	EJEMPLOS
Referencia de celdas	Cualquier celda que contenga un valor numérico	A1, Z50, G60:M70
Valores	Cualquier valor numérico que sea constante	25, 15%, 200
Operadores	Especifican la operación que se va a realizar con los valores o la referencia de las celdas	+, -, *, /
Funciones	Fórmulas predeterminadas para realizar cálculos estadísticos, matemáticos, financieros, lógicos, etc.	Promedio, Suma, Tasa, Fecha, Producto, etc.

- Ejemplo

	A	B	C		A	B	C
1		lado 1	lado 2	1	se entra texto		se entra texto
2	Medida 1	12,5	8,3	2	se entra texto	se entra número	se entra número
3	Medida 2	11,8	9,2	3	se entra texto	se entra número	se entra número
4	Medida 3	13,1	7,9	4	se entra texto	se entra número	se entra número
5	Medida 4	12,4	8,7	5	se entra texto	se entra número	se entra número
6	Media	12,5	8,5	6	se entra texto	=SUMA(B2:B5)/4	=SUMA(C2:C5)/4
7	Error med.	0,2	0,2	7	se entra texto	=DESVESTP(B2:B5)/RAIZ(4)	=DESVESTP(C2:C5)/RAIZ(4)
8	error relat.	1,9	2,8	8	se entra texto	=100*B7/B6	=100*C7/C6

Figura 3.

En el esquema se muestra del lado izquierdo el contenido propiamente dicho de las celdas de la hoja de cálculo, y, en el lado derecho, el tipo de función que se realiza. Por ejemplo, en toda la columna A y en toda la fila 1 se entran textos; en el rango definido por las celdas B2:C5 se entran números; en las celdas B6 y C6 se calcula la media aritmética de los cuatro números contenidos en los rangos B2:B5 y C2:C5, en el primer caso usando la función SUMA del rango correspondiente, y en el segundo listando las celdas a sumar, y en ambos casos dividiendo entre la constante 4; en las celdas B7 y C7 se inserta la función DESVESTP, que calcula la desviación estándar de una población, y se divide entre RAIZ(4), que es la raíz cuadrada de 4, para calcular el error absoluto de la media; y por último, en la celda B8, y en forma análoga en la celda C8, se multiplica el contenido de la celda B7 por 100 y se divide entre el contenido de la celda B6 para calcular el error porcentual de las cuatro medidas.

5. Creación de Gráficos:

- Pasos para elaborar un gráfico

Para generar un gráfico, debemos realizar lo siguiente:

- Seleccionar los datos, tanto las categorías, la serie de datos y los títulos de la serie que será la leyenda en el gráfico.

	A	B
1	X	Y
2	1,25	1,77
3	2,55	3,01
4	3,9	4,55
5	4,85	6,01
6	5,5	6,44

Figura 4.

- Se puede seleccionar el menú INSERTAR - GRÁFICO o el botón Asistente para gráfico que se encuentra en la barra de tareas



1. Desplegará una pantalla donde se puede escoger el tipo de gráfico, de acuerdo a los datos. Presionar el botón **Siguiente>** cada vez que terminemos de seleccionar las opciones que nos presenta el asistente para gráficos.

2. El paso 2 de 4 nos permite seleccionar nuevamente el rango de datos y colocarlos por columnas o filas.

3. El paso 3 de 4 presenta más opciones como el escribir los títulos, agregar líneas de división, modificar el formato de la leyenda, agregar rótulos a los datos, insertar la tabla de los datos seleccionados.

4. El último paso nos presenta la opción de insertar el gráfico en la misma hoja donde seleccionamos los datos o insertarlo en otra hoja nueva.

Ver las siguientes figuras:

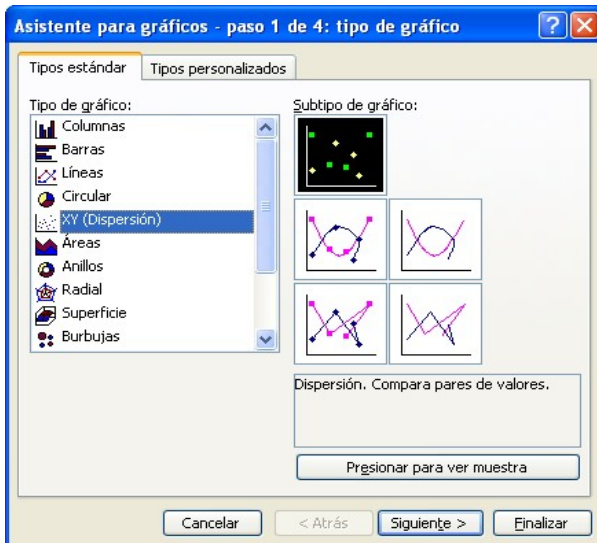


Figura 5: Paso 1

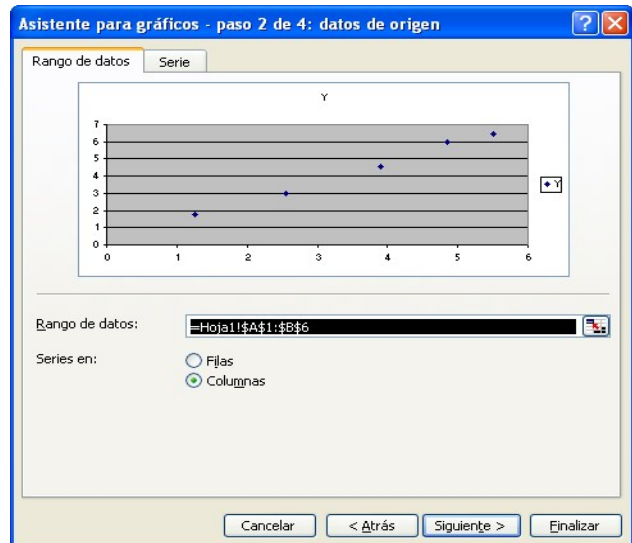
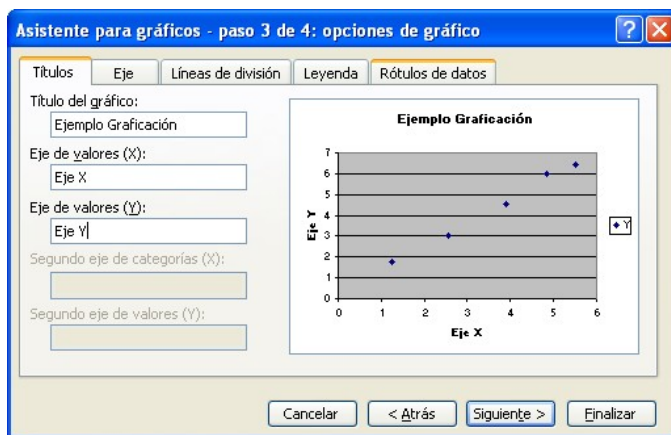


Figura 6: Paso 2



6. Trazado de Barras de Error:
Figura 7: Paso 3

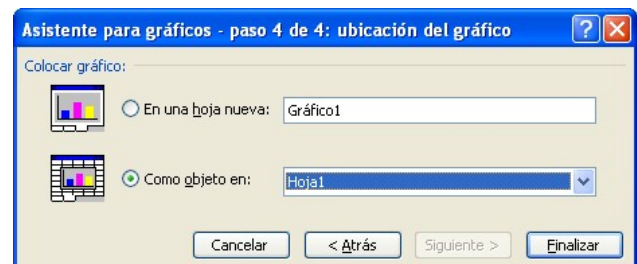


Figura 8: Paso 4

Las barras de error son una herramienta que permite mostrar el rango del desvío estándar de una medición experimental.

Supongamos estos datos ficticios:

	A	B	C	D
1	X	Y	Error X	Error Y
2	1.25	1.77	0.94	0.80
3	2.55	3.01	1.91	1.35
4	3.90	4.55	2.93	2.05
5	4.85	6.01	3.64	2.70
6	5.50	6.44	4.13	2.90

Figura 9

Con los datos del rango A1:B6 creamos este gráfico XY

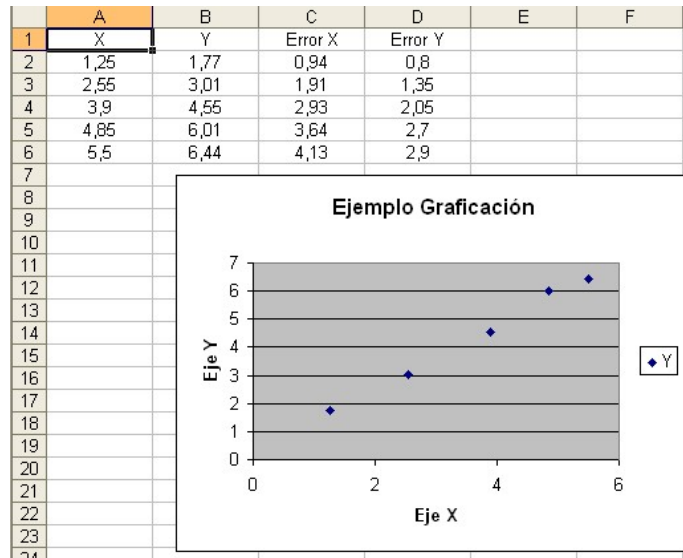


Figura 10

Para agregar barras de error a un gráfico, seleccionamos una de las series de datos haciendo click en cualquiera de los rombos azules de la gráfica y abrimos el menú de formato de series de datos:

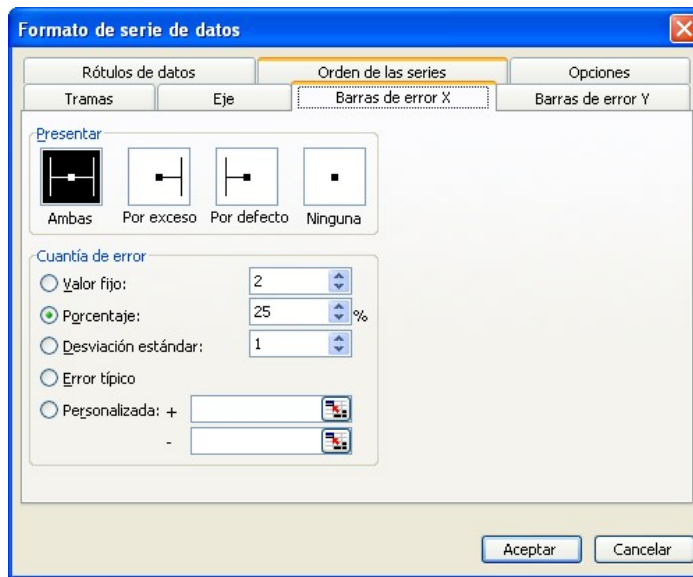


Figura 11

El diálogo cuenta con una pestaña para definir las barras de error de X y otra para definir las de Y.

En el cuadro de definiciones podemos elegir entre la presentación de la barra (ninguna, por exceso, por defecto o ambas) y la cuantía del error. Por ejemplo si definimos un error del 25% para cada punto en la ventanilla de Porcentaje y elegimos la opción Ambas en Presentar, veremos:

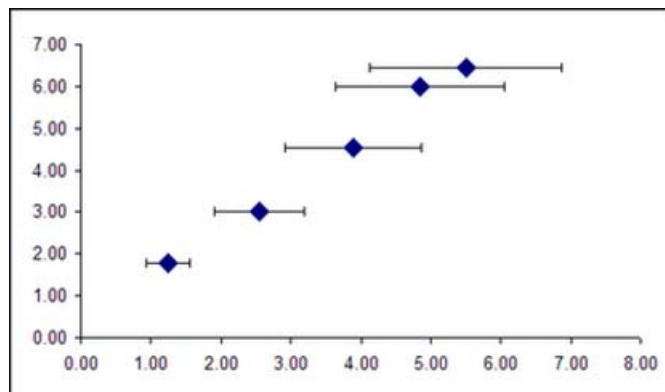


Figura 12

Excel ha agregado una línea a ambos lados de cada punto, que representan una desviación del 25% de este punto. Si agregamos el mismo error al valor de las Y obtendremos el siguiente resultado:

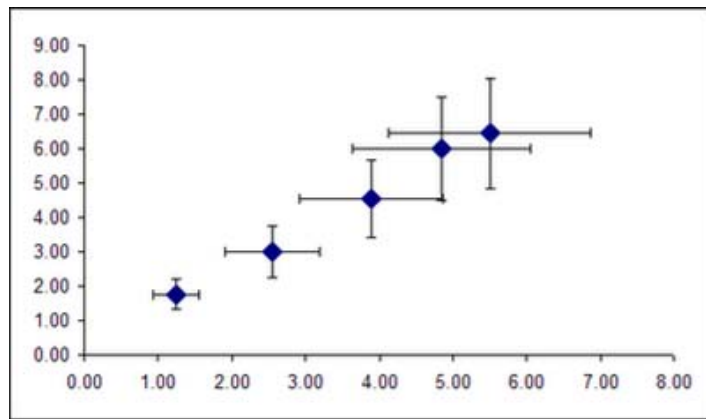


Figura 13

6. Ajuste de Curvas:

Para realizar el ajuste de curvas en Excel se utilizan las **líneas de tendencia**, con la gráfica anterior podemos establecerlas como se muestra en la siguiente figura:

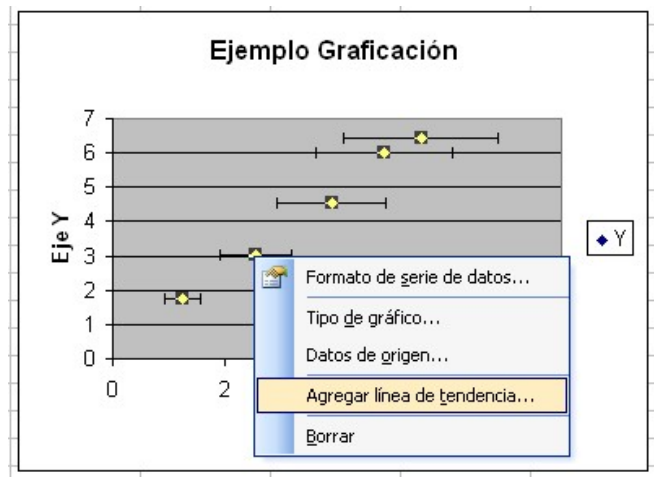


Figura 14

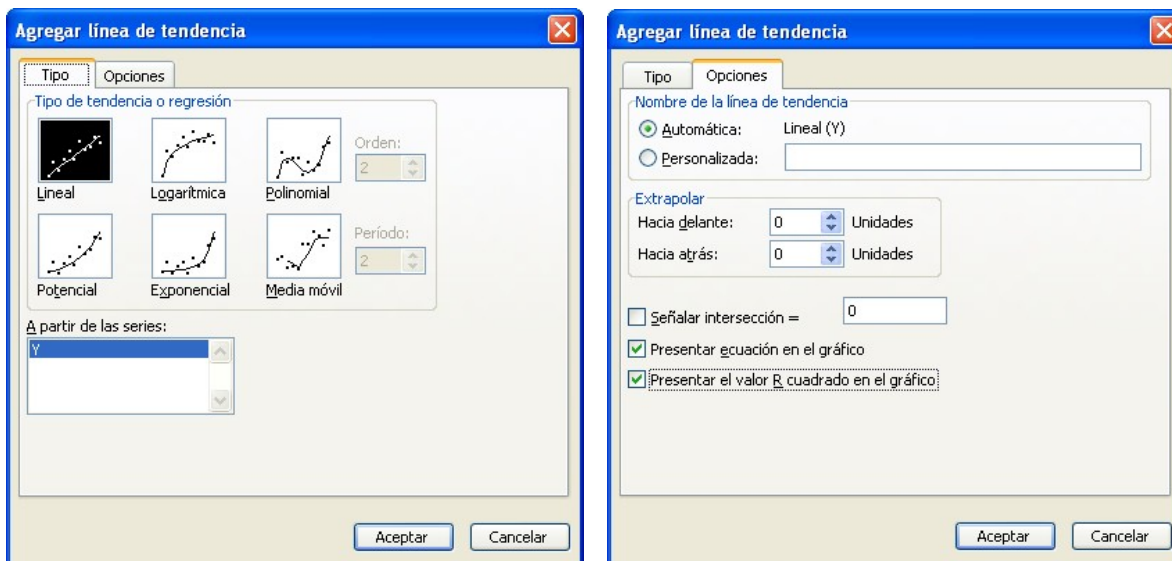


Figura 15

Seleccionamos el tipo de tendencia de las opciones disponibles: lineal, logarítmica, polinomial, etc. en la pestaña tipo, luego en la pestaña opciones seleccionamos las casillas de verificación para presentar ecuación en el gráfico y presentar el valor R. Cuando presione el botón aceptar, la línea que mejor ajuste es dibujada, la ecuación de la línea y el valor de R-cuadrado se mostrarán en el gráfico como se muestra en la figura a continuación. Usted puede mover la ecuación haciendo clic y arrastrando a la posición deseada.

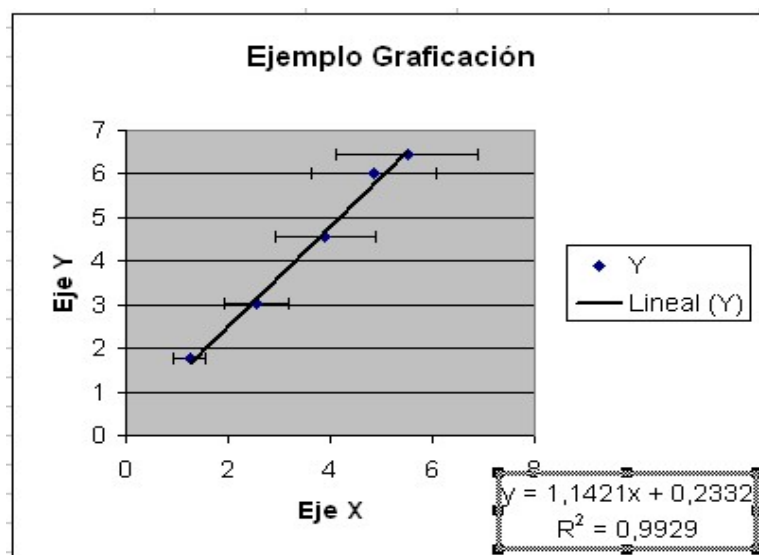


Figura 16

El valor R-cuadrado es realmente el cuadrado del coeficiente de correlación. El coeficiente de correlación R, nos da una medida de cuan adecuada es la relación lineal

entre los valores de x e y . Un valor de $R = 1$ indica que la relación lineal entre los valores de x e y es exacta. Valores de R cercanos a 1 indican que una relación lineal es excelente. Si el coeficiente de correlación es relativamente lejano a 1, las predicciones basadas en la relación lineal $y = mx + b$, no serán confiables.

Sugerencia: Es recomendable establecer el formato de los números presentados en la fórmula, haciendo click en la misma y seleccionando la opción Formato > Formato de rótulo de datos, en la barra de menús, donde en la pestaña número pueden ajustarse el número de posiciones decimales como se muestra en la figura:

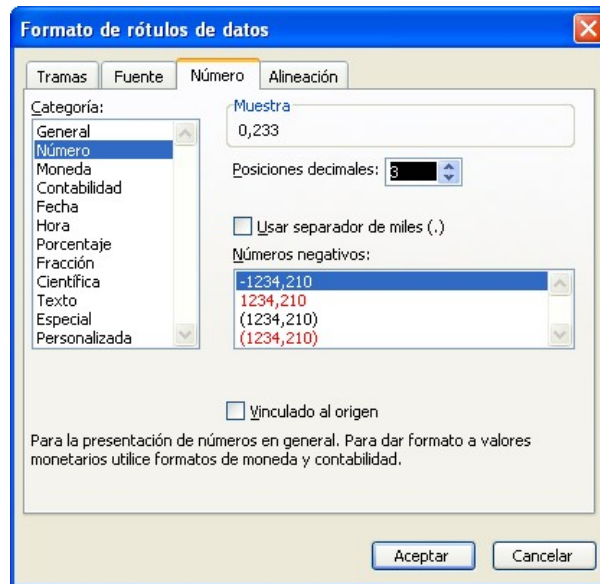


Figura 17

MASA EQUIVALENTE DE UN RESORTE

Consideremos una masa M que oscila suspendida en el extremo de un resorte, cuya masa m_r es pequeña en comparación con M , pero no despreciable. Se desea demostrar que la masa equivalente del resorte que oscila es:

$$m_{eq} = \frac{1}{3} m_r$$

Para simplificar la demostración supondremos un modelo muy sencillo que consiste en considerar que *el resorte se estira y se comprime de manera uniforme*.

Esto significa que si, en un cierto instante, la longitud total del resorte es L y si se considera una pequeña porción del resorte de longitud dy ubicado a distancia y por debajo del punto de suspensión, entonces esta distancia será una fracción constante de la longitud total instantánea, L .

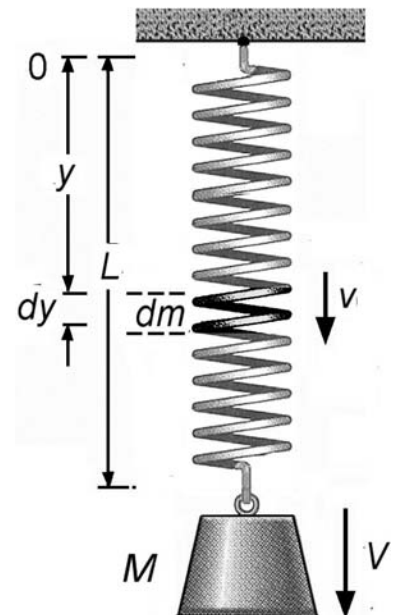
Bajo esta suposición, la masa dm de dicho elemento está relacionada en forma lineal con la masa total del resorte, m_r :

$$dm = \left(\frac{dy}{L}\right) m_r$$

Por otra parte, si en el instante considerado la masa suspendida tiene una velocidad V , entonces la velocidad $v(y)$ del elemento de masa será:

$$v(y) = \left(\frac{y}{L}\right) V$$

Podemos calcular ahora la energía cinética del elemento de masa dm :



$$dK = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{L} m_r\right)\left(\frac{y}{L}V\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r V^2}{L^3}\right)y^2 dy$$

Si integramos la expresión anterior hallamos la energía cinética total del resorte, en términos de la velocidad instantánea de la masa suspendida.

$$K_r = \int dK = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r V^2}{L^3}\right) \int_0^L y^2 dy = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r V^2}{L^3}\right)\left(\frac{L^3}{3}\right) = \frac{1}{6} m_r V^2$$

Comparemos esta expresión de la energía cinética total del resorte con la energía cinética de la masa M suspendida:

$$K_r = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r}{3}\right)V^2 \quad \Leftrightarrow \quad K_M = \frac{1}{2} M V^2$$

Luego podemos concluir que durante las oscilaciones el resorte de masa m_r se comporta como si tuviera una masa "equivalente" a un tercio de su masa real:

$$m_{eq} = \frac{1}{3} m_r$$

EJERCICIOS SOBRE ERRORES Y GRÁFICOS

1. Un observador realiza la medición de una magnitud física x y obtiene los siguientes resultados:

$$x_1 = 2,10; x_2 = 1,99; x_3 = 2,11; x_4 = 2,01; x_5 = 2,00; x_6 = 1,99; x_7 = 2,05.$$

Calcule el error porcentual cometido en la medición.

- a) 0,9 %.
- b) 1,4 %.
- c) 1,9 %.
- d) 2,3 %.
- e) ninguna de las anteriores.

2. Calcule el error absoluto en la determinación de la magnitud X dada por la relación

$$X = \frac{a+b}{a-c},$$

donde las cantidades a , b y c son positivas ($a \neq c$); sus errores respectivos son Δa y Δb . La cantidad c no tiene error.

- a) $\Delta X = \Delta a(b+c)(a-c)^{-2} + \Delta b(a-c)^{-1}$.
- b) $\Delta X = \Delta a(b+c)(a-c)^{-2} - \Delta b|a-c|^{-1}$.
- c) $\Delta X = \Delta a(b+c)(a-c)^{-2} + \Delta b|a-c|^{-1}$.
- d) $\Delta X = \Delta a(b+c)(a-c)^{-2} - \Delta b(a-c)^{-1}$.
- e) ninguna de las anteriores.

3. Elija la opción que represente mejor alguna afirmación verdadera sobre el error relativo $\Delta\rho_c/\rho_c$ en de la densidad de un cuerpo sólido dada por la expresión

$$P' = P \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right),$$

donde P' y P son lecturas distintas ($P > P'$) de un dinamómetro con una apreciación conocida. Considere que la densidad del líquido ρ_l no tiene error.

- a) $\Delta\rho_c/\rho_c$ puede ser negativo.
- b) $\Delta\rho_c/\rho_c$ siempre es muy pequeño y positivo.
- c) $\Delta\rho_c/\rho_c$ es proporcional a P .
- d) $\Delta\rho_c/\rho_c$ es proporcional a $\Delta P/P$.
- e) ninguna de las anteriores.

4. Calcular el error porcentual de $z = x/y$, donde $\Delta x = \Delta y = 1$ y $x = -10$, $y = 10$. Se sabe que $dz/z = dx/x - dy/y$.

- a) Δz es cero.
- b) Δz es el 20% de z .
- c) Δz es el 10% de z .
- d) Δz es negativo.
- e) ninguna de las anteriores.

5. Para un gráfico $\log y$ vs. x que consiste de una recta de pendiente m , elija al menos una de las siguientes opciones que sea correcta:

- a) si $m = 0$, $y(x)$ es constante.
- b) si $m < 0$, $y(x)$ es negativa.
- c) si $m = 0$, $y(x)$ es positiva.
- d) si $m > 0$, $y(x)$ es constante.
- e) ninguna de las anteriores.

6. La expresión

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

permite obtener los parámetros m y b de una recta de mínimos cuadrados ajustada al conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}$ ya que:

- a) la cantidad $[y_i - (mx_i + b)]^2$ es mínima.
- b) la suma de todas las diferencias $y_i - (mx_i + b)$ es mínima.
- c) la suma de todas las cantidades $[y_i - (mx_i + b)]^2$ es mínima.
- d) S es una función derivable con respecto a m y b .
- e) ninguna de las anteriores.

7. En un gráfico de $\text{sen } \theta$ vs. θ desde $\theta = 0 \text{ rad}$ hasta $\theta = 1,2 \text{ rad}$, donde los valores de $\text{sen } \theta$ tienen un 10% de error, se puede afirmar que:

- a) la recta de mínimos cuadrados pasa por el origen.
- b) no existe una diferencia apreciable entre las rectas de mayor y menor pendiente.
- c) las barras de error para cada valor de $\text{sen } \theta$ son iguales.
- d) no se puede graficar una recta de pendiente promedio pues faltan las barras de error para los valores de θ .
- e) ninguna de las anteriores.

8. Indicar la opción que exprese mejor la relación entre una colección de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ y una recta $y = mx + b$ ajustada a dicha colección por el método de mínimos cuadrados:

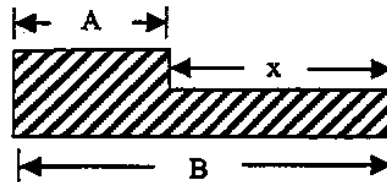
- a) la pendiente m es mínima.
- b) la diferencia $y_i - y(x_i)$ no tiene signo definido.
- c) la cantidad $[y_i - y(x_i)]^2$ es mínima.
- d) la recta $y = mx + b$ pasa por la mayoría de los puntos (x_i, y_i) .
- e) ninguna de las anteriores.

9. Un multímetro analógico está siendo usado para medir la diferencia de potencial entre los bornes de una resistencia. El error de estimación del experimentador es el 3% de la escala utilizada. Si está utilizando el multímetro en la escala de 50 Voltios y el resultado de la medida es 30 Voltios; ¿Cuál es el error relativo asociado a la medida?

- a) $\varepsilon_r = 0,05$
- b) $\varepsilon_r = 0,9$
- c) $\varepsilon_r = 0,2$
- d) $\varepsilon_r = 0,09$
- e) $\varepsilon_r = 0,5$

10. Para determinar la longitud "x" de la pieza mecánica mostrada, un estudiante mide las longitudes:

$$A = (3,6 \pm 0,2) \text{ mm} \text{ y } B = (8,7 \pm 0,3) \text{ mm}$$



¿Cuál es el error porcentual en la medida de "x"?

- a) 2 %
- b) 4 %
- c) 6 %
- d) 10 %
- e) ninguna de las anteriores

11. Un osciloscopio está siendo usado para medir la frecuencia "f" de una señal sinusoidal. En la pantalla caben 3 períodos de la señal que ocupan 9 divisiones exactas. Si la escala de la base de tiempo está situada en 1 mseg/div. y el estudiante puede apreciar fácilmente 0,1 div de pantalla., ¿Cuál de las siguientes 5 respuestas para el error porcentual de "f" es la correcta?

- (a) $\varepsilon\% = 0,1\%$
- (b) $\varepsilon\% = 1\%$
- (c) $\varepsilon\% = 3\%$
- (d) $\varepsilon\% = 0,5\%$
- (e) $\varepsilon\% = 0,3\%$

12. En la Práctica del Momento de Inercia, un estudiante mide el tiempo total "t = 40,0 seg." que tarda el péndulo en realizar 20 oscilaciones completas y determina su período "T". Si la incertidumbre en la medida de "t" es $\Delta t = 0,2$ seg. (el doble del tiempo de reacción). ¿Cuál es la incertidumbre (error absoluto) asociada con el inverso del período al cuadrado ($1/T^2$).

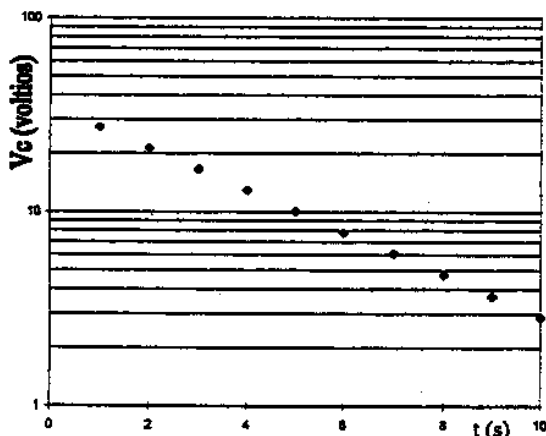
- a) $\varepsilon_a = 0,003 \text{ s}^{-2}$
- b) $\varepsilon_a = 0,001 \text{ s}^{-2}$
- c) $\varepsilon_a = 0,02 \text{ s}^{-2}$
- d) $\varepsilon_a = 0,1 \text{ s}^{-2}$
- e) $\varepsilon_a = 0,05 \text{ s}^{-2}$

13 Al medir 20 períodos en un movimiento oscilatorio, se logra mejorar:

- a) la precisión
- b) la exactitud
- c) ambas
- d) ninguna de las anteriores

14. En la práctica de Circuitos Transientes RC, un estudiante estudia la descarga de un condensador "C" sobre una resistencia "R". Para ello grafica en papel semi-log la diferencia de potencial " $V_c(t)$ " [Volt] en función del tiempo "t" y obtiene el siguiente gráfico. Sabiendo que la función es

$$V_c(t) = V_0 * \exp(-t/\tau):$$



¿Cuál de las 5 respuestas corresponde a la constante de tiempo " τ " de la descarga?

- (a) 18 seg.
- (b) 4 seg.
- (c) 9 seg.
- (d) 0,2 seg.
- (e) 0,5 seg.

15. Un estudiante mide el tiempo total "t = 40,0 seg." que transcurre entre 20 destellos sucesivos emitidos por una fuente luminosa. Si trata de determinar el tiempo "T" que transcurre entre dos destellos sucesivos, y si la incertidumbre en la medida de "t" es $\Delta t = 0,5$ seg. (el doble del tiempo de reacción). ¿Cuál es la incertidumbre (error absoluto) asociada con la frecuencia de los destellos?

- a) $\epsilon_a = 0,006 \text{ s}^{-1}$
- b) $\epsilon_a = 0,001 \text{ s}^{-1}$
- c) $\epsilon_a = 0,02 \text{ s}^{-1}$
- d) $\epsilon_a = 0,3 \text{ s}^{-1}$
- e) $\epsilon_a = 0,05 \text{ s}^{-1}$

16. Se han medido experimentalmente las siguientes magnitudes:

$$L = (2,091 \pm 0,1) \text{ m} \quad \text{y} \quad T = (2,892 \pm 0,008) \text{ s}$$

Seleccione el valor de g con su respectivo error tomando en cuenta que estas tres magnitudes están relacionadas por la ecuación:

$$T = 2\pi (L/g)^{1/2}$$

- a) $(9,865 \pm 0,101) \text{ m/s}^2$
- b) $(9,87 \pm 0,10) \text{ m/s}^2$
- c) $(9,9 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$
- d) $(10,0 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$
- e) $(10 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$

17. Seleccione de las opciones de la (a) a la (e) el número de cifras significativas que tiene cada uno de los datos que se dan a continuación:

	Dato	a)	b)	c)	d)	e)
i)	32,4	1	2	3	0	ninguna
ii)	4.530,06	6	4	3	2	ninguna
iii)	0,0020	5	4	2	1	ninguna
iv)	1.500 $\pm 10\%$	1	2	3	4	ninguna

18. Seleccione la expresión correcta para escribir la magnitud de un resultado determinado con su respectivo error:

	Resultado	a)	b)	c)	d)	e)
i)	6,7344 $\pm 0,002$	6,7	6,73	6,734	6,7344	ninguna
ii)	16,618 + 0,02	16,618	16,62	16,6	17	ninguna
iii)	157,2455 ± 10	157	157,	150	160	ninguna

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

Pregunta	Respuesta
1	a
2	c
3	d
4	b
5	a
6	c
7	e
8	b
9	a
10	d
11	b
12	d
13	a
14	b
15	d
16	c
17 i	c
17 ii	a
17 iii	c
17 iv	b
18 i	c
18 ii	b
18 iii	d

El aprendizaje de las ciencias naturales contempla dos enfoques complementarios e indisolubles si se desea que el estudiante logre una comprensión real y perdurable de los fenómenos naturales. Uno de ellos es la formulación cuantitativa que resulta de la aproximación que se hace de los fenómenos con modelos que intentan reproducirlos. El otro enfoque se basa en la observación que estimula la reflexión para conseguir la comprensión del fenómeno. La generación de nuevos conocimientos puede resultar de la aplicación de un modelo, de la observación sistemática de los fenómenos naturales, o, como ocurre en la mayoría de los casos, de un esfuerzo cooperativo y complementario de ambos enfoques. En los cursos de física básica se presenta al estudiante el primero de los enfoques. En los cursos de laboratorio se busca desarrollar las aptitudes y habilidades pertinentes para el segundo de los enfoques. El objetivo del presente curso de laboratorio es precisamente iniciar al estudiante en la práctica del método científico y de la experimentación, compaginando el estudio de fenómenos físicos del mundo cotidiano con el apoyo de modernas técnicas de análisis. Bajo estas premisas, se han seleccionado experiencias que abordan los más importantes tópicos de las físicas generales del primer año para que sean estudiados una vez más, pero en esta ocasión desde el punto de vista experimental. Esta guía es el producto del trabajo de un grupo de profesores que se han planteado una actualización de los cursos de laboratorio combinando: la incorporación de las diversas experiencias que se han tenido en los últimos años; la renovación y modernización de los equipos y la introducción de nuevas prácticas de alto contenido didáctico, y a la vez motivantes, con el objetivo de afianzar la comprensión de la física.



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR